МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ. ЧАСТИНА 1

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 124«Системний аналіз»,
освітньою програмою «Системний аналіз фінансового ринку»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Диференціальні рівняння. конспект лекцій. частина 1 [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз», освітньої програми «Системний аналіз фінансового ринку» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Богданський Ю.В, Калюжний О.О., Мальцев А.Ю., Подколзін Г.Б., Чаповський Ю.А. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,38 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 74 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу (протокол № 4 від 22.04.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ. ЧАСТИНА 1

Рецензент	Ільєнко А.Б., доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, кандидат фіз.-мат. наук
Відповідальний редактор	Бондаренко В.Г., професор кафедри математичних методів системного аналізу, д.ф.-м.н.

Посібник містить теоретичні відомості із традиційних тем дисципліни «Диференціальні рівняння» – теорема Пікара, продовження розв’язків, рівняння, що не розв’язні відносно похідної, особливі розв’язки та обвідні, лінійні диференціальні рівняння та системи.

Зміст

ВСТУП

На другому курсі студенти спеціальності «Системний аналіз» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Інституту прикладного системного аналізу вивчають дисципліну «Диференціальні рівняння».

При вивченні цієї дисципліни вважається, що студент досить добре засвоїв математичні дисципліни попереднього року навчання: лінійну алгебру та математичний аналіз. Зокрема, не можливо навчитися розв'язувати диференціальні рівняння на практиці, не володіючи методами інтегрального та диференціального числення. При викладенні лінійної теорії всюди, де це можливо, використовувалися методи лінійної алгебри. Це, з одного боку, спрощувало викладення матеріалу, а з іншого боку значно зменшило об'єм посібника.

Слід зауважити, що курс «Диференціальні рівняння» є базовим для таких дисциплін наступних років навчання як «Функціональний аналіз», «Рівняння математичної фізики», «Випадкові процеси».

Посібник присвячено методам розв'язку та якісного дослідження звичайних диференціальних рівнянь. Мета посібника – допомогти студентам освоїти основні теоретичні положення курсу «Диференціальні рівняння» та навчити грамотно застосовувати ці положення на практиці, спростити формування практичних навичок розв'язання та дослідження диференціальних рівнянь, що з’являються в різних галузях науки та техніки.

Посібник (точніше, його перша частина) складається з таких розділів:

- Диференціальні рівняння першого порядку;
- Лінійні диференціальні рівняння та системи.

Викладення матеріалу починається з доведення фундаментальної теореми теорії диференціальних рівнянь – теореми Коші-Пікара.

Для рівнянь першого порядку, які не задовольняють достатні умови застосування вказаної теореми, наведено техніку їх розв’язання (“метод параметризації”). При цьому виникає ефект неєдиності розв’язку відповідної задачі Коші, що супроводжується наявністю особливих розв’язків цих рівнянь.

У другому розділі розглянуто класичну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь (однорідних та неоднорідних) та застосування цієї теорії до розв’язання лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку. Основою цієї теорії є фундаментальний результат, відповідно до якого система усіх розв’язків однорідної система n лінійних диференціальних рівнянь на числовому проміжку утворює лінійний простір розмірності n (базис якого називається „фундаментальною системою розв’язків” вихідної системи рівнянь).

Основний теоретичний матеріал посібника супроводжується численними прикладами. Текст насичений вправами, які, на думку авторів, мають стимулювати студентів до активної самостійної роботи і сприятимуть більш глибокому розумінню основних теоретичних положень курсу.

Розбирати текст кожної лекції рекомендується двічі: при першому читанні доведення теорем можна не вивчати, а зосередитися лише на чіткому розумінні всіх означень, тверджень та формул. При другому читанні слід сумлінно опрацювати доведення всіх тверджень з «пензликом в руках», намагаючись чітко усвідомити всі логічні переходи.

Автори щиро бажають всім успіхів при вивченні курсу «Диференціальні рівняння».

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

РОЗДІЛ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ $1^{го}$ ПОРЯДКУ

Під (звичайним) диференціальним рівнянням $1^{го}$ порядку розуміємо рівняння виду $F(x, y, y') = 0$, а розв'язок його є функція $y = y(x)$, що визначена на деякому числовому проміжку $\Delta = \langle a;b \rangle \subset \mathbb{R}$ і задовольняє на цьому проміжку тотожність: для $\forall x \in \Delta$: $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. Синоніми "розв'язку" – "інтеграл диференціального рівняння" та "інтегральна крива". При цьому треба розуміти, що розв'язок диференціального рівняння не обов'язково визначений в явній формі – він може бути параметрично визначений або в неявній формі.

§1. Теорема Пікара

В цьому параграфі розглядаємо диференціальне рівняння $1^{го}$ порядку, що "розв'язне відносно першої похідної", тобто рівняння

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Функція f припускається визначеною на деякій підмножині $D \subset \mathbb{R}^2$. Ставимо задачу про пошук інтегральної кривої рівняння (1), що проходить через фіксовану точку $(x_0, y_0) \in D$, тобто розв'язку, що задовольняє умову:

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Така задача (задача (1)-(2)) називається "задачею Коші".

Виявляється, що за відповідних (не дуже обтяжливих) умов на функцію f, можна гарантувати існування та єдність локального розв'язку задачі (1)-(2).

Теорема 1 (Ш. Пікар). Нехай (x_0, y_0) – внутрішня точка D, а функція f неперервна в D і задовольняє в D умову Ліпшиця відносно змінної y, тобто $\exists C > 0 \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$ виконується нерівність:

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le C \left| y_1 - y_2 \right| \tag{3}$$

Тоді існує таке $\delta > 0$, що на відрізку $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ існує і притому єдиний розв'язок задачі (1)-(2).

Зауваження. 1. Зрозуміло, що за змістом теореми за множину D можна взяти окіл точки (x_0, y_0).

2. Умова Ліпшиця не є обтяжливою: вона виконується в разі існування та неперервності часткової похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ в околі точки (x_0, y_0). Дійсно, в замкненому околі точки неперервна функція $\frac{\partial f}{\partial y}$ обмежена за теоремою Вейєрштрасса, а тоді умова (3) буде наслідком теореми Лагранжа (обміркуйте!).

Доведення теореми. Розв'язок задачі Коші (1)-(2) – це функція $y(x)$, для якої: $y'(x) = f(x, y(x))$. Тож $y(x)$ – диференційовна функція. А з огляду на неперервність складеної функції $f(x, y(x))$, $y(x)$ – неперервно диференційовна. Звідси: $y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$. Тож $y(x)$ – є <u>неперервним розв'язком інтегрального рівняння</u>

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt. \tag{4}$$

Навпаки. Нехай $y(x)$ – неперервний розв'язок рівняння (4). Тоді $y(x_0)=y_0$, а також права частина (4) є диференційовною функцією аргументу x. Після диференціювання обох частин (4) одержимо (1).

Тож пошук розв'язків задачі (1)-(2) еквівалентен пошуку неперервних розв'язків рівняння (4).

Не втрачаючи загальності можна вважати, що окіл є замкненим прямокутником $\Pi=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|\le a;|y-y_0|\le b\}$. Тоді неперервна функція f буде обмеженою на Π:

$$\sup_{\Pi}|f(x,y)|=M. \tag{5}$$

Ідея подальшого доведення полягає в тому, що в просторі неперервних функцій на відрізку $[x_0-a;x_0+a]$ ми розглянемо відображення $F:g\mapsto F(g)$, що ставить у відповідь неперервній функції g нову функцію за правилом: $(F(g))(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,g(t))dt$. При цьому функція $F(g)$ також виявляється неперервною і рівняння (4) перетворюється на таке: $F(y)=y$.

При подальшому доведенні ми будемо користуватись оцінкою (5), а для цього важливо, щоб графіки наших функцій не виходили за межі прямокутника Π. Це також важливо і з іншої причини: графіки функцій можуть вийти за межі контрольованого околу точки (x_0,y_0). Виникає питання: а чи можна досягти бажаної мети шляхом зменшення відрізку аргументу (зменшення a)?

Візьмемо додатне $\delta \le a$. Тоді $\left|\left(F\left(g\right)\right)\left(x\right)-y_0\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,g\left(t\right)\right)dt\right| \le M\delta$ і в разі, якщо за δ взяти число: $\delta = \min\left\{a;\frac{b}{M}\right\}$ ми гарантовано одержимо нерівність: $\left|\left(F\left(g\right)\right)\left(x\right)-y_0\right| \le b$ (в разі, якщо функція g також має цю властивість, тобто: $\sup\limits_{|x-x_0|\le\delta}\left|g\left(x\right)-y_0\right| \le b$).

Тож тепер пошук розв'язку задачі (1)-(2) зведено до пошуку неперервної на відрізку $\Delta = \left[x_0-\delta; x_0+\delta\right]$ функції y, що задовольняє тотожність: $F\left(y\right)=y$ (а також оцінку: $\sup\limits_{|x-x_0|\le\delta}\left|y\left(x\right)-y_0\right| \le b$). Така функція буде знайдена методом „послідовних наближень".

Нехай $g_0\left(x\right)\equiv y_0$ на Δ, а послідовність функцій g_n будується за правилом: $g_{n+1}\left(x\right)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,g_n\left(t\right)\right)dt=\left(F\left(g_n\right)\right)\left(x\right)$ ($n=0;1;2;...$). Доведемо, що функціональна послідовність (неперервних!) функцій g_n на Δ рівномірно збігається і гранична функція буде розв'язком рівняння (4).

З цією метою оцінимо різницю $\left|g_{k+1}\left(x\right)-g_k\left(x\right)\right|$ на відрізку Δ.

$$\left|g_{k+1}\left(x\right)-g_k\left(x\right)\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,g_k\left(t\right)\right)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,g_{k-1}\left(t\right)\right)dt\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{x_0}^{x}\left|f\left(t,g_k\left(t\right)\right)-f\left(t,g_{k-1}\left(t\right)\right)\right|dt\right| \le C\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left|g_k\left(t\right)-g_{k-1}\left(t\right)\right|dt\right|.$$

Повторне застосування одержаної нерівності дає:

$$\left|g_{k+1}(t)-g_k(t)\right| \le C^2\left|\int_{x_0}^{x} dt\int_{x_0}^{t}\left|g_{k-1}(s)-g_{k-2}(s)\right|ds\right| \le \ldots \le$$

$$\le C^k\left|\int_{x_0}^{x} dt_1\int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{k-1}}\left|g_1(t_k)-g_0(t_k)\right|dt_k\right| \le [\text{оскільки}$$

$$\left|g_1(s)-g_0(s)\right| \le 2b \text{ на } \Delta] \le C^k \cdot 2b \cdot \frac{\delta^k}{k!}$$ (обміркуйте!).

Збіжність числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k\delta^k \cdot 2b}{k!}$ за теоремою Вейєрштрасса призводить до рівномірної збіжності на Δ функціонального ряду $g_0(x)+\left(g_1(x)-g_0(x)\right)+\left(g_2(x)-g_1(x)\right)+\ldots$, тож і функціональної послідовності його часткових сум $\left\{g_k(\cdot)\right\}$.

Гранична функція $y(x)=\lim_{k\to\infty} g_k(x)$ є неперервною як рівномірна границя послідовності неперервних функцій, і для перевірки (4) залишилось довести рівномірну збіжність на Δ послідовності функцій $f\left(t, g_k(t)\right)$ до функції $f\left(t, y(t)\right)$, бо тоді за відомою теоремою аналізу для всіх $x\in\Delta$:

$$\int_{x_0}^{x} f\left(t, g_k(t)\right)dt \to \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt.$$

Останній факт є наслідком таких міркувань. f – рівномірно неперервна на Π (теорема Кантора). Тож $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0$: $\left(\left|s_1-s_2\right|<\delta; t\in\Delta\right)\Rightarrow\left(\left|f(t,s_1)-f(t,s_2)\right|<\varepsilon\right)$. А з іншого боку, $\exists N\,\forall n\ge N;\forall t\in\Delta$: $\left|g_n(t)-y(t)\right|<\delta$. Звідси: $\forall n\ge N;\forall t\in\Delta$: $\left|f\left(t, g_n(t)\right)-f\left(t, y(t)\right)\right|<\varepsilon$.

Залишилось довести єдиність неперервного розв’язку (4) на відрізку Δ.

Нехай $z(x)$ – довільний розв'язок і $y(x)$ – побудований вище. Тоді, як і раніше, для кожного $x \in \Delta$:

$$\left|z(x)-g_k(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\left(t, z(t)\right)dt - \int_{x_0}^{x} f\left(t, g_{k-1}(t)\right)dt\right| \le$$

$$\le C\left|\int_{x_0}^{x}\left|z(t)-g_{k-1}(t)\right|dt\right| \le \ldots \le \frac{2bC^k\delta^k}{k!} \to 0,\ k \to \infty.$$

Тому $z(x) \equiv y(x)$. ■

Узагальнення. Надалі ми будемо досліджувати системи звичайних диференціальних рівнянь $1^{\text{го}}$ порядку виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) = f_2\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) \end{cases}$$

Такі системи можуть бути переписані у векторній формі:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}\left(t, \vec{x}(t)\right) \tag{6}$$

і для них також будемо розглядати задачу Коші:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \tag{7}$$

Виявляється, що наведене вище доведення теореми 1 без жодних ускладнень може бути перенесене на випадок задачі (6) -(7). При цьому інтеграл від векторної функції числового аргументу слід розуміти покоординатно, а в усіх оцінках слід замінювати модуль числа на норму вектора. Єдине, що потребує при цьому перевірки – це оцінка:

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\vec{x}(s)\,ds\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t}\left\|\vec{x}(s)\right\|ds\right| \tag{8}$$

Приходимо до теореми.

Теорема 2 (Ш. Пікар). Нехай $\vec{f}$ визначена на $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, неперервна на D і задовольняє на D умову Ліпшиця відносно n останніх аргументів:

$$\exists C > 0: \left(\left(t, \vec{x}\right), \left(t, \vec{y}\right) \in D\right) \Rightarrow \left(\left\|\vec{f}\left(t, \vec{x}\right) - \vec{f}\left(t, \vec{y}\right)\right\| \le C\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|\right);$$

$\left(t_0, \vec{x}_0\right)$ – внутрішня точка D.

Тоді існує таке $\delta > 0$, що на відрізку $\left[t_0 - \delta; t_0 + \delta\right]$ існує і притому єдиний розв'язок задачі (6)-(7).

Вправа 1. Перевірте (8) та відслідкуйте доведення теореми 2.

Підказ. Для неперервних функцій інтеграл є границею інтегральних сум. Спочатку розпишіть (8) для інтегральних сум, а потім обґрунтуйте збереження нерівності при граничному переході.

Зауваження. Так само, як і у теоремі 1 достатньо вимагати неперервної диференційовності вектор-функції $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ в околі $\left(t_0, \vec{x}_0\right)$.

§2. Продовження розв'язків

Нехай D – область (відкрита, зв'язна множина) в $\mathbb{R}^2$ і $f : D \to \mathbb{R}$ задовольняє умови теореми 1. Тоді для кожної точки $\left(x_0, y_0\right)$ області D існує відрізок $\Delta = \left[x_0 - \delta; x_0 + \delta\right]$, на якому розв'язок задачі Коші (1)-(2) існує і цей розв'язок єдиний. Аналіз доведення теореми 1 показує, що те ж саме можна стверджувати і для довільного проміжку $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ в разі, якщо $x_0 \in \tilde{\Delta}$.

Якщо Δ_1, Δ_2 – два числові проміжки і $x_0 \in \Delta_1 \subset \Delta_2$, а y_k – розв'язки задачі (1)-(2) на проміжку Δ_k ($k = 1,2$), то в разі, якщо $y_1 = y_2 |_{\Delta_1}$, y_2 називається продовженням y_1 на Δ_2. Розв'язок y задачі (1)-(2), для якого продовження не існує, називається не продовжуваним.

Теорема 2. Нехай f визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і задовольняє умови теореми 1. Тоді для кожної точки (x_0, y_0) існує і притому єдиний непродовжуваний розв'язок.

Доведенню теореми передумовимо дві леми.

Лема 1. Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (1) відповідно на $[a;b]$ і $[b;c]$, причому $y_1(b) = y_2(b)$. Тоді функція

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), x \in [a;b] \\ y_2(x), x \in [b;c] \end{cases}$$

також є розв'язком.

Доведення леми. Рівність $y'(x) = f(x, y(x))$ потребує перевірки лише в точці b. Але $y'_-(b) = y'_1(b) = f(x, y_1(b)) = f(x, y_2(b)) = y'_2(b) = y'_+(b)$. Тож $\exists y'(b)$ і при цьому: $y'(b) = f(b, y(b))$.■

Лема 2. Нехай $x_0 \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ і y_k – розв'язок задачі (1)-(2) на Δ_k ($k = 1,2$). Тоді $y_1(x) = y_2(x)$ на $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Доведення леми. Нехай $\exists x_1 \in \Delta$, в якій $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. Нехай $x_0 < x_1$ (варіант $x_1 < x_0$ розглядається аналогічно). Тоді існує

$$\tilde{x} = \inf\left\{x > x_0 \mid y_1(x) \neq y_2(x)\right\}, \tag{9}$$

а з теореми Пікара виходить, що $\tilde{x} > x_0$ (бо інакше в кожному околі x_0 було б два різних розв'язки). Тож $y_1(x) = y_2(x)$ при $x \in [x_0;\tilde{x})$, а тому з неперервності y_k: $y_1(\tilde{x}) = y_2(\tilde{x})$. Повторне застосування теореми Пікара, але з початковою умовою: $y(\tilde{x}) = y_1(\tilde{x}) = y_2(\tilde{x})$ приводить до рівності $y_1(x) = y_2(x)$ в околі аргументу $\tilde{x}$, що суперечить припущенню (9).■

Доведення теореми. Нехай $\{y_\alpha(\cdot)\}$ – сім'я усіх розв'язків задачі (1)-(2), кожен з яких визначено на відповідному проміжку $\Delta_\alpha \ni x_0$. Для довільного числа $x \in \Delta = \bigcup\limits_\alpha \Delta_\alpha$ покладемо: $y(x) = y_\alpha(x)$, якщо $x \in \Delta_\alpha$. Коректність завдання функції y обумовлена лемою 2 (обміркуйте!). Точку x можна вважати внутрішньою точкою Δ_α, бо інакше застосування теореми Пікара в точці $(x, y_\alpha(x))$ дозволить одержати локальний розв'язок, який за лемою 1 вдається "склеїти" з розв'язком y_α і, для нового розв'язку y_β, x вже стане внутрішньою точкою Δ_β. Тож $y'(x) = y'_\alpha(x) = f(x, y_\alpha(x)) = f(x, y(x))$. Оскільки $\forall \alpha : \Delta_\alpha \subset \Delta$, то y – непродовжуваний.

Єдиність непродовжуваного розв'язку. Якщо y_1 і y_2 – два непродовжуваних розв'язки задачі (1)-(2), то, як виходить з леми 2, достатньо перевірити: $\Delta_1 = \Delta_2$ для відповідних проміжків визначення. В разі, якщо $\Delta_1 \neq \Delta_2$, функція $y(x)=\begin{cases} y_1(x), & \text{якщо} \quad x \in \Delta_1 \\ y_2(x), & \text{якщо} \quad x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1 \end{cases}$ буде розв'язком рівняння (1) (відслідкуйте можливі взаємні положення Δ_1 і Δ_2), що суперечить непродовжуваності y_1 та y_2.■

Вправа 2. Доведіть, що проміжок визначення Δ непродовжуваного розв'язку є відкритим інтервалом.

Зауваження. Не уточнюючи зміст наступного твердження, повідомимо, що в разі обмеженості області D, розвозок задачі (1)-(2) продовжується "впритул до межі області".

§3. Рівняння, що не розв'язні відносно похідної. Метод параметризації

Нехай диференціальне рівняння першого порядку не розв'язне відносно похідної (має вид $F(x,y,y')=0$). Тоді, в разі, якщо F є функцією класу C^1 (неперервно диференційовна) в області $D \subset \mathbb{R}^3$, а в точці $(x_0,y_0,p_0) \in D$: $F(x_0,y_0,p_0)=0$; $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0) \neq 0$, то, за теоремою про неявну функцію, в околі точки (x_0,y_0,p_0) рівняння $F(x,y,p)=0$ еквівалентне рівнянню $p=f(x,y)$ з функцією f класу C^1. Ці міркування дозволяють замінити при локальному дослідженні вихідне диференціальне рівняння на рівняння типу (1).

Далі розглядається інший прийом розв'язання рівнянь $F(x,y,y')=0$, який може стати в нагоді навіть і тоді, коли виконуються вищенаведені умови і вдається перейти до рівняння типу (1).

Шукаємо розв'язок рівняння $F(x,y,y')=0$ у параметричному вигляді. Тож нам слід знайти функцію $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, що на деякому проміжку $\Delta=\{t\}$ задовольняє тотожність:

$$F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)=0 \tag{10}$$

За відповідних умов (гладкість функції F) множина $S=\{(x,y,p)\,|\,F(x,y,p)=0\}$ являє собою поверхню у просторі $\mathbb{R}^3$, яка може бути задана і в параметричному вигляді: $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ p=p(u,v) \end{cases}$, $(u,v)\in G\subset\mathbb{R}^2$. Тож $F\big(x(u,v),y(u,v),p(u,v)\big)\equiv 0$ на G.

Розв'язку рівняння відповідає крива $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ p=p(t)=\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \end{cases}$, що задовольняє на Δ тотожність: $F\big(x(t),y(t),p(t)\big)\equiv 0$, а тому належить поверхні S. Цій кривій у свою чергу в площині параметрів $\{(u,v)\}$ відповідає крива $\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases}$. Тож:

$$\begin{cases} x(t) = x\big(u(t), v(t)\big) \\ y(t) = y\big(u(t), v(t)\big) \\ p(t) = p\big(u(t), v(t)\big). \end{cases}$$

При цьому:

$$p\big(u(t), v(t)\big) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\dot{u}(t) + \dfrac{\partial y}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\dot{v}(t)}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\dot{u}(t) + \dfrac{\partial x}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\dot{v}(t)}. \qquad (11)$$

Звідси:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\, p\big(u(t), v(t)\big) - \frac{\partial y}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\right)\dot{u}(t) + \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\, p\big(u(t), v(t)\big) - \frac{\partial y}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\right)\dot{v}(t) = 0, \end{gathered} \qquad (12)$$

а це, власне, значить, що крива $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ є розв'язком рівняння:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot p - \frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot p - \frac{\partial y}{\partial v}\right) dv = 0\,. \qquad (13)$$

Таким чином, розв'язку $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ рівняння (10) в координатах (u, v) відповідає крива, що є розв'язком рівняння (13).

Твердження 1 (зворотне). Нехай $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ – розв'язок рівняння (13). Тоді $\begin{cases} x(t) = x\big(u(t), v(t)\big) \\ y(t) = y\big(u(t), v(t)\big) \end{cases}$ є розв'язком рівняння (10).

Доведення. Розв'язок (13) – це власне крива, що задовольняє тотожність (12). З (12) та (11) виходить: $p(t)=p\big(u(t),v(t)\big)=\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$. А оскільки крива $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \\ p=p(t) \end{cases}$ що відповідає $\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases}$, задовольняє тотожність: $F\big(x(t),y(t),p(t)\big)=0$ (належить поверхні S), то для неї виконується (10).■

Зауваження. Рівняння (13) може бути переписано у вигляді $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv\right)p=\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv$ і може бути одержано з тотожності

$$dy=pdx \tag{14}$$

Застосування. 1. <u>Рівняння Клеро</u>

$$y=xy'+f(y').$$

Тут $F(x,y,p)=xp+f(p)-y; F(x,y,y')=0.$ Параметризація:

$$\begin{cases} x=u \\ y=uv+f(v). \\ p=v \end{cases}$$

З (14) маємо: $d\big(uv+f(v)\big)=vdu$; $udv+vdu+f'(v)dv=vdu$;

$$\left[\begin{array}{l} u=-f'(v) \\ dv=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-f'(v) \\ y=-vf'(v)+f(v) \end{cases} \\ \begin{cases} x=u \\ y=Cu+f(C) \end{cases} \Leftrightarrow y=Cx+f(C) \end{array}\right.$$

Приклад. $y = xy' + \left(y'\right)^2$. $\left[\begin{array}{l} y = Cx + C^2 \\ y = -\dfrac{x^2}{4}. \end{array}\right.$

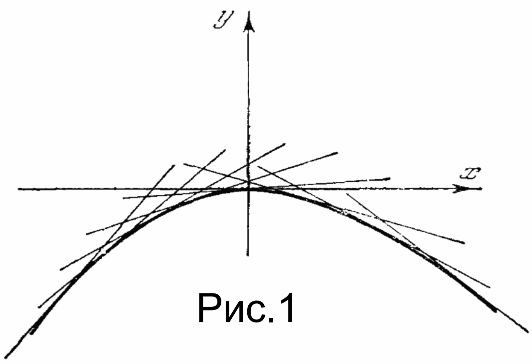

Рис.1

2. Рівняння Лагранжа. Рівняння Лагранжа є узагальненням рівняння Клеро:

$$y = a(y')x + b(y').$$

Замінимо y' через p; $dy = pdx$.

$$d\big(a(p)x + b(p)\big) = pdx; xa'(p)dp + a(p)dx + b'(p)dp = pdx;$$

$$\big(a(p) - p\big)dx + \big(xa'(p) + b'(p)\big)dp = 0.$$

$\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{a'(p)}{a(p)-p}x - \dfrac{b'(p)}{a(p)-p}$ – лінійне неоднорідне рівняння 1$^{\text{го}}$ порядку і т. д.

§4. Особливі розв'язки та обвідні.

Означення. Точка (x_0, y_0) називається точкою неєдиності (розгалуження) розв'язків рівняння $F(x, y, y') = 0$, якщо в цій точці дотикаються принаймні два розв'язки, що не співпадають в жодному околі цієї точки.

Точки розгалуження можуть виникати тоді, коли в точці (x_0, y_0) не спрацьовує теорема про неявну функцію, тобто точки $(x_0, y_0, y'(x_0))$ задовольняють систему:

$$\begin{cases} F\left(x_0, y_0, p_0\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p}\left(x_0, y_0, p_0\right) = 0, \end{cases} \qquad (15)$$

або втрачається гладкість функції F в цій точці.

Приклади. 1. Рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Загальний розв'язок: $y = \left(x + C\right)^3$. Точки $\left(x, 0\right)$ – точки неєдиності. Причина: права частина вихідного диференціального рівняння не диференційовна при $y = 0$ і локально не виконується умова Ліпшиця.

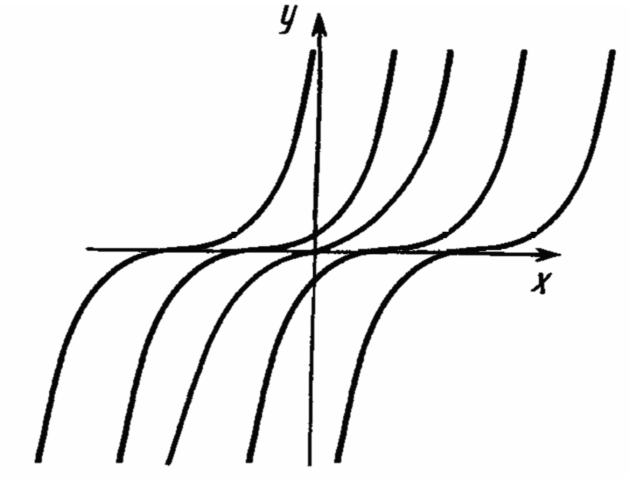

Рис.2

2. Рівняння $y = xy' + \left(y'\right)^2$. Як можна побачити на мал. 1: всі точки, що належать параболі $y = -\dfrac{x^2}{4}$ є точками неєдиності. Причина: ці точки (і це буде зрозумілим з подальшого) задовольняють систему рівнянь (15). На мал. 1 є також точки, в яких розв'язки мають перетин. Такі точки виникають саме тому, що при розв'язанні рівняння Клеро відносно y' приходимо до сукупності рівнянь, розв'язних відносно y'. Ці точки ми не відносимо до точок неєдиності.

Означення. Інтегральна крива (розв'язок) Γ називається <u>особливою інтегральною кривою</u> (<u>особливим розв'язком</u>), якщо $\forall(x_0, y_0)\in\Gamma$ є точкою розгалуження розв'язків диференціального рівняння.

Приклади. 1. Рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Розв'язок $y \equiv 0$ є особливим.

2. Розглянемо рівняння Клеро $y = xy' + f(y')$, в якому $f \in C^2(\mathbb{R}); \forall p \in \mathbb{R} : f''(p) \neq 0$. Тому f' – строго монотонна; f – строго опукла на $\mathbb{R}$. Підозрілими точками (на предмет неєдиності) є точки, що задовольняють систему (15):

$$\begin{cases} F(x,y,p) = -y + xp + f(p) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = x + f'(p) = 0. \end{cases}$$

Звідси: $\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$ – параметричне завдання кривої Γ, що підпадає під підозру як особлива.

Те, що крива Γ є розв'язком, ми вже знаємо (див. §3).

Строга монотонність і диференційовність функції f' дає можливість ввести у розгляд обернену до неї диференційовну функцію g: $p = g(x)$. Тоді рівняння кривої Γ прийме вид:

$$y = xg(x) + f(g(x)). \qquad (16)$$

Доведемо, що кожна точка кривої (16) є точкою неєдиності. Нагадаємо, що рівняння Клеро має сім'ю розв'язків: $y = Cx + f(C)$. Доведемо, що через кожну точку $(x_0, y(x_0))$ кривої (16) проходить принаймні одна пряма вказаної сім'ї; що дотикається Γ.

Коефіцієнт C цієї прямої шукаємо як розв'язок системи (співвідношення значень ординат та кутових коефіцієнтів в точці x_0):

$$\begin{cases} Cx_0 + f(C) = x_0 g(x_0) + f(g(x_0)) \\ C = g(x_0) + x_0 g'(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0). \end{cases}$$

Оскільки $f'(g(x_0)) = -x_0$, то система сумісна і при цьому $C = g(x_0)$. Оскільки $y' = (xg(x) + f(g(x)))' = xg'(x) + g(x) + f'(g(x))g'(x) = g(x)$, а функція g (обернена до $-f'$) не може бути сталою на жодному проміжку аргументу, то в жодному околі точки $(x_0, y(x_0))$ крива Γ не може співпасти з прямою. Тож Γ – особливий розв'язок.

Означення. Нехай є сім'я $\{\Gamma_\alpha\}$ кривих в $\mathbb{R}^2$. Крива Γ називається <u>обвідною сім'ї</u> $\{\Gamma_\alpha\}$, якщо для кожної точки $(x_0, y_0) \in \Gamma$ існує крива сім'ї $\{\Gamma_\alpha\}$, що дотикається Γ в цій точці і не співпадає з Γ в жодному околі (x_0, y_0).

Приклади. 1. Пряма $y \equiv 0$ є обвідною сім'ї кривих $\{y = (x + C)^3\}$ (див. мал. 2).

2. $y = -\dfrac{x^2}{4}$ є обвідною сім'ї прямих $\{y = Cx + C^2\}$ (мал. 1). І взагалі особливий розв'язок диференціального рівняння 1$^{\text{го}}$ порядку, як виходить з означень, буде обвідною деякої сім'ї розв'язків.

Надалі будемо вважати, що сім'ю $\{\Gamma_\alpha\}$ визначено рівнянням (тут C – параметр):

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{17}$$

тобто $\Gamma_C = \{(x, y) \mid \Phi(x, y, C) = 0\}$.

Нехай Γ – обвідна сім'ї (17). Поставимо у відповідь точці $(x, y) \in \Gamma$ значення параметра C, при якому Γ_C дотикається до Γ в точці (x, y). Така відповідність не є обов'язково взаємно однозначною, але дозволяє параметризувати точки кривої Γ параметром C: $x = x(C); y = y(C)$ (взагалі кажучи, може так статись, що $(x(C_1), y(C_1)) = (x(C_2), y(C_2))$ при $C_1 \neq C_2$). Тож

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C). \end{cases} \tag{18}$$

Припускаємо надалі: всі функції, що зустрічаються є диференційовними.

Твердження 2 (необхідна умова обвідної). Якщо (18) – обвідна сім'ї (17), то $(x(C), y(C))$ задовольняє систему:

$$\begin{cases} \Phi(x(C), y(C), C) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C}(x(C), y(C), C) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Доведення. Умова $\Phi(x(C), y(C), C) = 0$ очевидна – це умова параметризації Γ. Оскільки обвідна дотикається до кривої сім'ї (17), то $\frac{\dot{y}(C)}{\dot{x}(C)}=-\frac{\Phi_x{}'\left(x(C),y(C),C\right)}{\Phi_y{}'\left(x(C),y(C),C\right)}$, звідки:

$\Phi_x{}'\left(x(C),y(C),C\right)\dot{x}(C)+\Phi_y{}'\left(x(C),y(C),C\right)\dot{y}(C)=0$. Тому :

$$0=\frac{d}{dC}\Phi\left(x(C),y(C),C\right)=\Phi_x{}'\left(x(C),y(C),C\right)\dot{x}(C)+$$

$$+\Phi_y{}'\left(x(C),y(C),C\right)\dot{y}(C)+\Phi_C{}'\left(x(C),y(C),C\right)=\frac{\partial}{\partial C}\Phi\left(x(C),y(C),C\right),$$

що й дає другу рівність в системі (19).■

Приклад. $(x-C)^2+y^2=1$ – система кіл. З малюнку (зробіть його!) можна побачити, що прямі $y=1$ та $y=-1$ є обвідними цієї сім'ї.

Система (19) в даному разі приймає вид:

$$\begin{cases}(x-C)^2+y^2=1\\ 2(x-C)=0,\end{cases}$$

звідки $y=\pm1$.

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ

§1. Початкові поняття

Систему диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій дійсного аргументу t, що має вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(t) x_j(t) + f_1(t) \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}(t) x_j(t) + f_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

надалі будемо називати системою лінійних диференціальних рівнянь (першого порядку). Коротше: системою ЛДР.

Тут $a_{ij}(t)$ – функції, що визначені на числовому проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$; $f_i(t)$ – також функції, що визначені на $\Delta \subset \mathbb{R}$. В разі, якщо всі $f_i(t) \equiv 0$ на Δ, систему (1) називаємо <u>однорідною</u>. Якщо ні – <u>неоднорідною</u>. Зверніть увагу на те, що кількість рівнянь в (1) співпадає з кількістю невідомих функцій.

Систему можна переписати й у вигляді:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \tag{2}$$

де $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$– квадратна матриця при кожному $t \in \Delta$.

Задача Коші для системи (2) (або (1)) – це задача пошуку розв’язку, що задовольняє початкову умову:

$$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0 \tag{3}$$

для фіксованої точки $t_0\in\Delta$.

Ми будемо також розглядати лінійні диференціальні рівняння n-го порядку для числових функцій (коротше: ЛДР)

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n(t)x(t)=g(t), \tag{4}$$

де $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ (коефіцієнти); $g(t)$(неоднорідність; права частина ЛДР) – функції на $\Delta\subset\mathbb{R}$. В разі, якщо $g(t)\equiv 0$ на Δ, ЛДР – однорідне (антитеза – неоднорідне).

Задачу Коші для рівняння (4) ставимо як систему умов:

$$x(t_0)=\tilde{x}_0;\dot{x}(t_0)=\tilde{x}_1;\ldots;x^{(n-1)}=\tilde{x}_{n-1} \tag{5}$$

Якщо поставити у відповідність числовій функції $x(t)$ вектор-функцію $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$, то з рівнянням (4) можна пов’язати таку систему ЛДР:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t)=\dot{x}(t) \\ \cdots \\ \dfrac{d}{dt}x^{(n-2)}(t)=x^{(n-1)}(t) \\ \dfrac{d}{dt}x^{(n-1)}(t)=-a_1(t)x^{(n-1)}(t)-a_2(t)x^{(n-2)}(t)-\ldots-a_n(t)x(t)+g(t), \end{cases}$$

або систему (2) в разі, якщо

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix};\ \vec{f}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

При цьому відповідна початкова умова задачі Коші:

$$\vec{x}(t_0)=\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \ldots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix}$$

Тож цілком природним є чекання на те, що результати, які будуть одержані для систем ЛДР, будуть мати неабиякий вплив на дослідження поведінки розв’язків ЛДР вищих порядків.

Надалі всі функції (для визначеності) припускаємо дійсно значними. Але цілком аналогічні результати можуть бути одержані і у випадку комплекснозначних функцій. У свій час ми скористаємось цією обставиною.

§2. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь

Теорема 1. Нехай елементи $a_{ij}(\cdot)$ матриці $A(\cdot)$ є неперервними функціями на $\Delta=[a;b]\subset\mathbb{R}$. Тоді для кожного $t_0\in[a;b]$ та $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ однорідна система ЛДР

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}(t) \tag{6}$$

має і притому єдиний розв'язок $\vec{x}(t)$, що визначений на всьому Δ і задовольняє умову: $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$.

Доведення. Нагадаємо спочатку, що в курсі математичного аналізу було доведено, що для кожної матриці A $(n\times n)$ існує число C таке, що для $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ виконується нерівність: $\|A\vec{x}\|\le C\|\vec{x}\|$. Детальніше:

$$C=\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$\|A\vec{x}\|^2=\sum_i\left(\sum_j a_{ij}x_j\right)^2\le\sum_i\left(\sum_j a_{ij}^2\right)\left(\sum_j x_j^2\right)=C^2\|\vec{x}\|^2.$$

Число C визначене в (7), домовимось називати нормою матриці A ($C=\|A\|$).

Крім того, раніше було обговорена нерівність для неперервних вектор-функцій:

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\vec{x}(s)\,ds\right\|\le\left|\int_{t_0}^{t}\|\vec{x}(s)\|\,ds\right| \tag{8}$$

Детальніше (через інтегральні суми):

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\vec{x}(s)\,ds\right\|=\left\|\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\vec{x}(s_j)\frac{t-t_0}{m}\right)\right\|=\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{m}\vec{x}(s_j)\frac{t-t_0}{m}\right\|\le$$

$$\le\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\|\vec{x}(s_j)\|\frac{|t-t_0|}{m}\right)=\left|\int_{t_0}^{t}\|\vec{x}(s)\|\,ds\right|.$$

При цьому ми скористались неперервністю норми: $(\vec{x}_k\to\vec{x}_0)\Rightarrow(\|\vec{x}_k\|\to\|\vec{x}_0\|)$ (перевірте!), бо це й значить $\left\|\lim\limits_{k\to\infty}\vec{x}_k\right\|=\lim\limits_{m\to\infty}\|\vec{x}_k\|$.

Як і при доведенні теореми Пікара (теорема 1.1), ми робимо висновок про те, що задача Коші (6)-(3) еквівалентна задачі пошуку неперервного розв’язку інтегрального рівняння для вектор-функцій:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\vec{x}(s)\,ds \tag{9}$$

Кожній функції $\vec{x}(t)$, що неперервна на $[a;b]$, поставимо у відповідь нову функцію $\left(F(\vec{x})\right)(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\vec{x}(s)\,ds$, що також неперервна на $[a;b]$ і тим самим є передумови для побудови, як і в доведенні теореми Пікара, послідовності неперервних на Δ функцій: $\vec{x}_0(t) \equiv \vec{x}_0; \vec{x}_m(t) = \left(F(\vec{x}_{m-1})\right)(t),\ m = 1, 2, \ldots$

Числова функція $\|A(t)\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2(t)\right)^{1/2}$ є неперервною функцією на замкненому відрізку $[a;b]$ і тому, за теоремою Вейєрштрасса, існує $M = \max_{a \le t \le b} \|A(t)\| < +\infty$.

Звідси:

$$\|\vec{x}_m(t) - \vec{x}_{m-1}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\left(\vec{x}_{m-1}(s) - \vec{x}_{m-2}(t)\right) ds \right\| \le$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} \left\| A(s)\left(\vec{x}_{m-1}(s) - \vec{x}_{m-2}(t)\right)\right\| ds \right| \le M \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \left(\vec{x}_{m-1}(s) - \vec{x}_{m-2}(t)\right)\right\| ds \right| \le \ldots$$

$$\ldots \le M^m \left| \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots dt_{m-1} \int_{t_0}^{t_{m-1}} \|\vec{x}_1(t_m) - \vec{x}_0\| dt_m \right| \le$$

$$\frac{M^m |t - t_0|^m}{m!} \max_{s \in \Delta} \|\vec{x}_1(s) - \vec{x}_0\|.$$

Числовий ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{M^m\left|t-t_0\right|^m}{m!}$ збіжний, тому рівномірно збігається на Δ функціональний ряд $\vec{x}_0(t)+\left(\vec{x}_1(t)-\vec{x}_0(t)\right)+\left(\vec{x}_2(t)-\vec{x}_1(t)\right)+\ldots$, а це власне доводить рівномірну на Δ збіжність послідовності вектор-функцій $\vec{x}_m(t)$. Якщо позначити $\vec{x}(t)=\lim_{m\to\infty}\vec{x}_m(t)$, то оцінка: $\left\|A(s)\left(\vec{x}(s)-\vec{x}_m(s)\right)\right\|\le M\left\|\vec{x}(s)-\vec{x}_m(s)\right\|$ дозволяє стверджувати рівномірну збіжність $A(s)\vec{x}_m(s)\xrightarrow[m\to\infty]{}A(s)\vec{x}(s)$ на Δ, а тому $\forall t\in\Delta$: $\int_{t_0}^{t}A(s)\vec{x}(s)ds=\lim_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t}A(s)\vec{x}_m(s)ds$. Тепер (9) одержимо граничним переходом $m\to\infty$ з рівності:

$$\vec{x}_m(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}A(s)\vec{x}_{m-1}(s)ds.$$

Єдиність розв’язку задачі Коші доведіть самостійно. Її доведення проводиться за тією ж схемою, що й єдиність в теоремі Пікара.■

При доведенні теоремі умова замкненості проміжку Δ була використана для обґрунтування обмеженості на Δ норми $\left\|A(t)\right\|$. Насправді, замкненість Δ не є принциповим для самого результату теореми: в ситуації, якщо Δ не є відрізок, і $t_0\in\Delta$, для $\forall t_1\in\Delta$ $\exists$ відрізок $[a;b]\subset\Delta$, для якого $t_0,t_1\in[a;b]$. Тоді доведена теорема гарантує існування на $[a;b]$ єдиного розв’язку задачі Коші. Незалежність значення розв’язку в t_1 від вибору $[a;b]$ доведіть самостійно.

Тому при подальшому дослідженні на проміжок Δ не накладаємо умову замкненості.

Запровадимо у розгляд “диференціальній вираз” $L:\vec{x}(t)\mapsto\dot{\vec{x}}(t)-A(t)\vec{x}(t)$. Функції $\vec{x}(\cdot)\in C^1(\Delta)$ (неперервно диференційовній на проміжку Δ) ставимо у відповідь функцію $(L\vec{x})(\cdot)\in C(\Delta)$ (неперервну на Δ).

Система рівнянь (6) набуває вигляду:

$$L\vec{x}=\vec{0}. \tag{6}$$

L – є лінійне відображення з $C^1(\Delta)$ в $C(\Delta)$.

Тому, якщо $\vec{x}_1(t),...,\vec{x}_m(t)$ – розв’язки (6), то довільна їх лінійна комбінація $C_1\vec{x}_1(t)+...+C_m\vec{x}_m(t)$ також буде розв’язком (6).

Фіксуємо $t_0\in\Delta$ і побудуємо відображення, що ставить у відповідь кожному розв’язку $\vec{x}(t)$ рівняння (6) (тобто $\vec{x}\in\operatorname{Ker}L$) вектор $\vec{x}(t_0)$ (значення $\vec{x}(t)$ в точці t_0). Це відображення $B(t_0):\operatorname{Ker}L\to\mathbb{R}^n$ є, вочевидь, лінійним оператором. При цьому, як виходить з теореми 1, $B(t_0)$ взаємно однозначно відображує $\operatorname{Ker}L$ на весь простір $\mathbb{R}^n$ (обміркуйте). Тому $B(t_0)$ є ізоморфізмом.

Наслідки: 1. Система розв’язків $\{\vec{x}_1(t),...,\vec{x}_m(t)\}$ рівняння (6) – лінійно незалежна на Δ в тому й тільки тому разі, якщо $\{\vec{x}_1(t_0),...,\vec{x}_m(t_0)\}$ – лінійно незалежна система векторів в $\mathbb{R}^n$.

2. $\dim \operatorname{Ker} L = n$ (розмірність простору розв'язків рівняння (6) дорівнює n). При цьому базис простору $\operatorname{Ker} L$ називається "<u>фундаментальною системою розв'язків однорідної системи ЛДР</u> (6)".

Розглянемо матричнозначну функцію $X(t)$, стовпці якої утворюють фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (6): $X(t) = (\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_n(t))$. Загальний розв'язок системи (6): $\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + ...C_n\vec{x}_n(t)$ можна записати і так:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}, \tag{10}$$

де $\vec{C}$ – стовпець $\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$. Така матричнозначна функція $X(t)$ називається <u>фундаментальною матрицею системи</u> (6).

Фундаментальна матриця системи (6), вочевидь, задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t)Y(t), \tag{11}$$

Для кожного стовпця матриці $Y(t)$: $\frac{d}{dt}\vec{y}_k(t) = A(t)\vec{y}_k(t)$, тож рівняння (11) можна мислити як набір, складений з n систем рівнянь (6).

Вправа. 1. Нехай $Y(t)$ – довільний розв'язок матричного рівняння (11). Тоді для будь-яких $t_1, t_2 \in \Delta$ матриці $Y(t_1), Y(t_2)$ вироджені або невироджені одночасно.

2. Якщо $X(t)$ – фіксована фундаментальна матриця системи (6), то загальний розв'язок рівняння (11) має вид: $Y(t) = X(t)C$, де C – довільна квадратна матриця.

§3. Формула Ліувілля – Якобі

Теорема 2 (Ж. Ліувілль; К. Якобі). Нехай $A(t)$ – неперервна на проміжку Δ матричнозначна функція; $t_0, t \in \Delta$; $Y(t)$ – розв'язок рівняння (11). Тоді

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds}$$

Лема 1. Нехай для кожного $t \in \Delta$ матриця $B(t)$ – квадратна $n \times n$; $B(t)$ – диференційовна функція на Δ (всі елементи матриці: $b_{ij}(t)$ є диференційовними функціями на Δ). Тоді:

$$\frac{d}{dt}\det B(t) = \begin{vmatrix} b'_{11}(t) & \cdots & b'_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b'_{21}(t) & \cdots & b'_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1}(t) & \cdots & b'_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Доведення леми.

$$\frac{d}{dt}\left(\det B(t)\right) = \frac{d}{dt}\sum_{\sigma \in S_n}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} b_{1,\sigma(1)}(t) b_{2,\sigma(2)}(t) \ldots b_{n,\sigma(n)}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma \in S_n}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} b_{1,\sigma(1)}(t) \ldots b_{k-1,\sigma(k-1)}(t) b'_{k,\sigma(k)}(t) b_{k+1,\sigma(k+1)}(t) \ldots b_{n,\sigma(n)}(t). \blacksquare$$

Доведення теореми 2. Нехай $Y(t)$ – розв'язок рівняння (11). Тоді за лемою 1: $\frac{d}{dt}\left(\det Y(t)\right)=\sum_{k=1}^{n}\det Y_k(t)$, де матриця $Y_k(t)$ одержана з $Y(t)$ диференціюванням k-го рядка.

Маємо:

$$Y_k(t)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&\mathbf{0}&\\&&1&&&&\\&&&0&&&\\&&&&1&&\\&\mathbf{0}&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}Y(t)+\begin{pmatrix}0&&&&&&\\&\ddots&&&&\mathbf{0}&\\&&0&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&\mathbf{0}&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}Y'(t)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&\mathbf{0}&\\&&1&&&&\\&&&0&&&\\&&&&1&&\\&\mathbf{0}&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&&&&&&\\&\ddots&&&&\mathbf{0}&\\&&0&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&\mathbf{0}&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}A(t)\right)Y(t)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&\mathbf{0}&\\&&1&&&&\\a_{k1}(t)&\cdots&\cdots&a_{kk}(t)&\cdots&\cdots&a_{kn}(t)\\&&&&1&&\\&\mathbf{0}&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}Y(t).$$

Тому $\det Y_k(t) = a_{kk}(t)\det Y(t)$, звідси:

$$\frac{d}{dt}\det Y(t) = \operatorname{tr} A(t)\cdot \det Y(t); \qquad \det Y(t) = C\cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds},$$

де $C = \det Y(t_0)$.■

§4. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n–го порядку

В цьому параграфі досліджуємо рівняння:

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)x(t) = 0. \quad (12)$$

Тут L – лінійний диференціальний оператор порядку n; t пробігає числовий проміжок $\Delta \subset \mathbb{R}$.

Задача Коші для рівняння (12) задається системою умов (5). В §1 була виявлена взаємно однозначна відповідність між розв'язками поставленої задачі Коші та розв'язками задачі Коші для однорідної системи ЛДР зі спеціального виду матрицею $A(t)$. Тому, з посиланням на теорему 1, можна зробити висновок:

Твердження 1. В разі, якщо коефіцієнти $a_k(t)$ $(k = 1,...,n)$ рівняння (12) є неперервними функціями на Δ, для будь-яких t_0 та $\tilde{x}_0,...,\tilde{x}_{n-1}$, задача Коші (12)–(5) має і притому єдиний розв'язок на Δ. Розв'язок задачі (12)–(5) є функцією класу $C^{(n)}(\Delta)$.■ (Обміркуйте!)

Означення. Нехай $x_1(t),...,x_m(t)$ – система (числових) функцій класу $C^{(m-1)}(\Delta)$. Функція:

$$W(x_1,...,x_m)=W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_m(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_m'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(m-1)}(t) & \cdots & x_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}$$

називається "<u>вронскіаном системи функцій</u> $\{x_1(t),...,x_m(t)\}$" (на честь польського математика Юзефа Вронського).

Вправа. 1. Якщо система функцій $\{x_1(t),...,x_m(t)\}$ – лінійно залежна на Δ, то $W(t)\equiv 0$.

2. Якщо існує $t_0\in\Delta$, в якій $W(t_0)\neq 0$, то система функцій $\{x_1(t),...,x_m(t)\}$ – лінійно незалежна.

3. Наведіть приклад лінійно незалежної системи функцій $\{x_1(t),x_2(t)\}$, для якої $W(t)\equiv 0$ на Δ.

Фіксуємо $t_0\in\Delta$ і кожному розв'язку $x(t)$ рівняння (12) поставимо у відповідь вектор $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$.

Оскільки L є лінійним оператором (перевірте!), то множина усіх розв'язків рівняння (12) ($\mathrm{Ker}\,L$) є лінійним простором. Відображення $B(t_0): x(t)\mapsto\begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ є лінійним оператором і, як виходить з твердження 1, повинно бути ізоморфізмом між $\operatorname{Ker} L$ та $\mathbb{R}^n$. Звідси: $\dim \operatorname{Ker} L = n$.

Наслідком наведених міркувань є наступне твердження:

Твердження 2. Нехай $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ – система, складена з n розв'язків рівняння (12). Тоді:

1) Якщо існує точка $t_0 \in \Delta$, в якій $W(t_0) = 0$, то $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ – лінійно залежна система функцій і при цьому для $\forall t \in \Delta : W(t) = 0$.

2) Якщо існує $t_0 \in \Delta$, в якій $W(t_0) \neq 0$, то система розв'язків $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ – лінійно незалежна і при цьому для $\forall t \in \Delta : W(t) \neq 0$. Така система розв'язків є базисом в просторі розв'язків і називається "<u>фундаментальною системою розв'язків рівняння (12)</u>".■

§5. Формула Остроградського – Ліувілля

Поставимо таку задачу. Є система функцій $x_1(t),...,x_n(t) \in C^{(n)}(\Delta)$. Відомо, що $W(t) = W(x_1,...,x_n) \neq 0$ для кожної точки $t \in \Delta$. Шукаємо однорідне ЛДР n-го порядку, для якого ці функції $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Твердження 3. Існує і притому єдине однорідне ЛДР n-го порядку виду (12) з неперервними коефіцієнтами, для якого функції $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Доведення. Спочатку перевіримо єдиність такого рівняння. Нехай окрім рівняння (12) таку властивість має і рівняння

$$x^{(n)}(t) + b_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + b_n(t)x(t) = 0. \tag{13}$$

В разі, якщо $b_1(t) \neq a_1(t)$, існує проміжок $\Delta_1 \subset \Delta$, в кожній точці якого: $a_1(t) - b_1(t) \neq 0$ (обміркуйте!). Тоді вихідна система функцій є лінійно незалежною системою розв'язків рівняння

$$\left(a_1(t) - b_1(t)\right)x^{(n-1)}(t) + ... + \left(a_n(t) - b_n(t)\right)x(t) = 0$$

на Δ_1, яке є рівнянням порядку $(n-1)$ (після ділення на $a_1(t) - b_1(t) \neq 0$), а тому не може мати n лінійно незалежних розв'язків.

Тож $a_1(t) \equiv b_1(t)$ і переходимо до порівняння $a_2(t)$ з $b_2(t)$. Повторення наведених міркувань поступово приводить до висновку про єдиність набору усіх коефіцієнтів.

Існування. Розглянемо рівняння:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) & x(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) & x'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) & x^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Після розкриття визначника за останнім стовпцем, коефіцієнт при $x^{(n)}(t)$ дорівнює $W(t)$. Умова: $W(t) \neq 0$ в жодній точці Δ, дозволяє на $W(t)$ одержати рівняння вигляду (12).■

Теорема 3 (М. Остроградський; Ж. Ліувілль).

Нехай $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ – система розв'язків рівняння (12). Тоді на Δ:

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}. \qquad (15)$$

Доведення. Якщо система розв'язків лінійно залежна, то $W(t) \equiv 0$ і формула (15) очевидна. Нехай система розв'язків $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ – лінійно незалежна. Тоді за твердженням 3, рівняння (12) співпадає з (14), а тому:

$$a_1(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & \cdots & x_1^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$ Тепер застосування леми 1

приводить до формули: $a_1(t)=-\dfrac{W'(t)}{W(t)}$ (обміркуйте!), звідки:

$$W(t)=C\cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)ds};\ C=W(t_0).$$ ■

Вправа. Виведіть теорему 3 з формули Ліувілля – Якобі (див. теорему 2).

Застосування. Розглянемо рівняння другого порядку:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=0. \qquad (16)$$

Нехай відомий один нетривіальний (ненульовий) розв'язок $x_1(t)$ рівняння (16). Якщо $x(t)$ – довільний розв'язок (16), то за формулою (15) маємо: $\begin{vmatrix} x(t) & x_1(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{x}_1(t) \end{vmatrix}=Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)ds}$.

Це рівняння 1[го] порядку відносно $x(t)$; лінійне, неоднорідне; при $C=1$ його частковий розв'язок $x(t)$ разом з $x_1(t)$ утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (16).

Інший спосіб розв'язання рівняння (16) при наявності розв'язку $x_1(t)$: покладемо $x(t)=y(t)\cdot x_1(t)$. Тоді:

$x'(t)=x_1(t)y'(t)+x_1'(t)y(t)$;

$x''(t)=x_1(t)y''(t)+2x_1'(t)y'(t)+x_1''(t)y(t)$; тож підстановка в (16) дає:

$$x_1(t)\,y''(t)+\left(2x_1'(t)+a_1(t)x_1(t)\right)y'(t)+$$
$$+\left(x_1''(t)+a_1(t)x_1'(t)+a_2(t)x_1(t)\right)y(t)=0.$$

Оскільки $x_1(t)$ – розв'язок (16), то заміною $y'(t)=z(t)$ одержимо рівняння 1[го] порядку відносно функції $z(t)$:

$$x_1(t)\,z'(t)+\left(2x_1'(t)+a_1(t)x_1(t)\right)z(t)=0.$$

Остання методика припускає узагальнення.

Твердження 4. Нехай $x_1(t),\dots,x_k(t)$ – лінійно незалежна система розв'язків однорідного ЛДР порядку n; $x_1(t)\neq 0$ в кожній точці Δ. Тоді підстановка $x(t)=x_1(t)z(t);\dot{z}(t)=y(t)$ зводить вихідне рівняння до однорідного ЛДР порядку $(n-1)$ відносно функції $y(t)$. Нове рівняння має $(k-1)$ лінійно незалежні розв'язки: $y_j=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x_{j+1}(t)}{x_1(t)}\right)$.

Доведення. Підстановка $x(t)=x_1(t)z(t)$ зведе рівняння (12) до вигляду:

$$x_1(t)z^{(n)}(t)+b_1(t)z^{(n-1)}(t)+\dots+b_{n-1}(t)z'(t)+L\left(x_1(t)\right)z(t)=0.$$

При цьому $L\left(x_1(t)\right)\equiv 0$.

Це рівняння повинно мати розв'язки $z_j(t)=\dfrac{x_j(t)}{x_1(t)}$.

Після ділення на $x_1(t)$ і заміни: $z'(t)=y(t)$ маємо однорідне ЛДР порядку $(n-1)$ з розв'язками $y_j=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x_{j+1}(t)}{x_1(t)}\right)$.Залишилось перевірити їх лінійну незалежність.

Нехай $C_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)+\ldots+C_k \frac{d}{dt}\left(\frac{x_k(t)}{x_1(t)}\right)\equiv 0$ на Δ. Тоді існує число C таке, що:

$$C_2 \frac{x_2(t)}{x_1(t)}+\ldots+C_k \frac{x_k(t)}{x_1(t)}\equiv C .$$

Звідки, з лінійної незалежності $\{x_j(t)\}$, усі $C_j=0$ (обміркуйте!).■

§6. Системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Експонента матриці

Розглянемо систему:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x} . \qquad (17)$$

Тут $A=(a_{ij})$ – числова квадратна матриця.

Розв’язати систему – це знайти фундаментальну систему розв’язків або, що еквівалентно, знайти матричнозначну функцію $X(t)$, таку, що $\det X(t)\neq 0$ і матриця $X(t)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{d}{dt}X(t)=AX(t). \qquad (18)$$

Тоді загальний розв’язок (17) має вид (10) (змінюючи $\vec{C}$ одержимо усі розв’язки (17)).

В разі, якщо $n=1$, рівняння (17) приймає вид: $\frac{dx}{dt}=ax$, звідки: $x(t)=e^{a(t-t_0)}x(t_0)$. Тому вельми логічно буде припустити, що і в загальному випадку розв’язок рівняння (18) матиме вид:

$$X(t)=e^{(t-t_0)A}\cdot X(t_0). \qquad (19)$$

Виникає проблема коректного означення експоненти матриці. Шлях до розв'язання цієї проблеми виберемо з огляду на його найбільшу користь у побудові подальшої теорії.

Означення. лінійний простір M назвемо нормованим, якщо на ньому визначено функцію $x \mapsto \|x\|$, що має такі властивості:

1) $\|x\| \geq 0$; $\left(\|x\| = 0\right) \Leftrightarrow \left(x = 0\right)$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Звичайно, що умови 1) – 3) повинні виконуватись для усіх $x, y \in M$ та $\lambda \in \mathbb{R}$.

Прикладами норм є:

1) $M = \mathbb{R}^n$; $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$;

2) $M =$ простір матриць $A = \left(a_{ij}\right)$ розміру $n \times n$; $\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ (перевірте!). Це – так звана "евклідова норма матриці".

При цьому на M можуть одночасно "співіснувати" різні норми і по відношенню до них у нас будуть різні нормовані простори.

Означення. Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$, визначені на M, називаються еквівалентними, якщо існують два числа $C_1, C_2 > 0$ такі, що для кожного $x \in M$ виконуються дві нерівності:

$$\begin{cases} \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \\ \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \end{cases} \tag{20}$$

Еквівалентність норм гарантує, що послідовність векторів x_m буде збіжною в сенсі однієї з норм в точності тоді, коли і в сенсі другої: $\left(\|x_m - x_0\|_1 \to 0\right) \Leftrightarrow \left(\|x_m - x_0\|_2 \to 0\right)$ (обміркуйте!). Аналогічна властивість і щодо фундаментальної послідовності векторів x_m:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 : \|x_m - x_n\|_1 \leq \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 : \|x_m - x_n\|_2 \leq \varepsilon\right) \text{ (обміркуйте!).}$$

З курсу математичного аналізу нам відомо, що в просторі $\mathbb{R}^n$ кожна фундаментальна послідовність збігається. Але – стосовно норми $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ (така властивість називається "<u>повнотою нормованого простору</u>"). Якщо інша норма еквівалентна вказаній, то ця ж властивість має місце (перевірте!!). <u>З наступної теореми тепер можна буде зробити висновок, що $\mathbb{R}^n$ за будь-якої норми буде повним простором</u> (!).

Це ж саме стосується будь-якого скінченновимірного простору, оскільки в ньому можна зафіксувати базис і за одну з норм взяти $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$ (x_k– координати в фіксованому базисі).

Теорема 4. Будь які дві норми в скінчненновимірному просторі еквівалентні.

Доведення. Нехай $\dim M = m$; $f_1, ..., f_m$ – базис в M; $x = x^1 f_1 + ... + x^m f_m$. Запровадимо норму $\|x\|_1 = \max\left\{\left|x^k\right| \,|\, 1 \leq k \leq m\right\}$ (перевірте властивості норми). Доведемо, що будь-яка інша норма $\|x\|$ еквівалентна $\|x\|_1$ (цього досить, перевірте!).

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} x^k f_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \left|x^k\right| \|f_k\| \leq \|x\|_1 \cdot \sum_{k=1}^{m} \|f_k\| = C_1 \|x\|_1 \qquad (21)$$

Звідси: ($x_n \to x$ за нормою $\|\cdot\|_1$) $\Rightarrow$ ($x_n \to x$ за нормою $\|\cdot\|$). ("З покоординатної збіжності виходить збіжність за нормою" – обміркуйте!).

Припустимо, що не існує $C > 0$, такого, що $\|x\|_1 \le C\|x\|$. Тоді існує послідовність $\{x_n\}$: $\|x_n\|_1 = 1$; $\|x_n\| \le \frac{1}{n}$ (обміркуйте!). $x_n = x_n^1 f_1 + ... + x_n^m f_m$; $\max\left\{\left|x_n^k\right| \mid k = 1,...,m\right\} = 1$ для кожного n. Тому модулі всіх координат векторів x_n не перевищують 1, а один з них дорівнює 1. Послідовність їх перших координат $\left\{x_n^1\right\}$ є обмеженою числовою послідовністю. За теоремою Больцано – Вейєрштрасса існує збіжна підпослідовність $x_{n_k}^1 \to x_\infty^1$. Всі вектори, номери яких не дорівнюють n_k надалі викинемо геть з послідовності $\{x_n\}$. Послідовність, що залишилась (її також позначаємо $\{x_n\}$), має особливість: числова послідовність перших координат є збіжною.

Далі розглядаємо $\left\{x_n^2\right\}$ – також обмежена числова послідовність. Наступне проріджування послідовності векторів $\{x_n\}$ призводить до того, що вже їх дві перші координати утворюють збіжні послідовності. Після m проріджувань одержимо послідовність $\{x_n\}$ таку, що $\forall k : \exists \lim_{n\to\infty} x_n^k = x_\infty^k$.

Позначимо: $x_\infty = \sum_{k=1}^{m} x_\infty^k f_k$. Тоді $\|x_n - x_\infty\|_1 \to 0$ (обміркуйте!)

З (21) тоді маємо: $\|x_n - x_\infty\| \to 0$, але $\|x_n - 0\| \le \frac{1}{n} \to 0$. Тож $x_\infty = 0$ (двох різних границь не буває!), а це призводить до суперечності: якщо $\forall k: x_n^k \to 0, n \to \infty$, то існує таке N, що для кожного $n \geq N$: $\|x_n\|_1 = \max\left\{\left|x_n^k\right| \mid 1 \leq k \leq m\right\} < \frac{1}{2}$ (обміркуйте!).■

Лінійний простір квадратних матриць $n \times n$ також є скінченновимірним, а тому є повним у будь-якій нормі. За норму матриці можна прийняти, наприклад, суму модулів всіх її елементів: $\|A\|_1 = \sum_{i,j} \left|a_{ij}\right|$ (перевірте аксіоми норми!), можна за норму прийняти $\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ (перевірте аксіоми норми!) – "евклідова норма".

Евклідова норма крім стандартних властивостей норми: $\|A\| \geq 0$; $\left(\|A\| = 0\right) \Leftrightarrow \left(A = 0\right)$, 0 тут – нульова матриця; $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$; $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, має ще одну: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Перевіримо останню властивість:

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leq \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{j,k} b_{kj}^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{j,k=1}^n b_{kj}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 .$$

Звідси: $\left\|A^2\right\| \leq \|A\|^2$; $\left\|A^3\right\| \leq \|A\|^3$ і для $\forall m \in \mathbb{N}: \left\|A^m\right\| \leq \|A\|^m$. Розглянемо послідовність квадратних матриць $B_m = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots + \frac{1}{m!}A^m$. Доведемо збіжність послідовності B_m (інакше кажучи, збіжність ряду: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$). З наведених вище міркувань нам достатньо довести її фундаментальність.

$$\left\|B_{m+p}-B_m\right\|=\left\|\frac{1}{(m+1)!}A^{m+1}+\ldots+\frac{1}{(m+p)!}A^{m+p}\right\|\le\frac{1}{(m+1)!}\left\|A^{m+1}\right\|+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(m+p)!}\left\|A^{m+p}\right\|\le\frac{1}{(m+1)!}\|A\|^{m+1}+\ldots+\frac{1}{(m+p)!}\|A\|^{m+p}.$$

Тепер зрозуміло, що фундаментальність послідовності $\{B_m\}$ є наслідком збіжності числового ряду $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^k$ (зверніть увагу на ці міркування! Доведено, що збіжність матричного ряду є наслідком його абсолютної збіжності при належному означенні цих понять).

Означення. $e^A=\lim\limits_{m\to\infty}B_m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$.

Теорема 5. Вектор-функція

$$\vec{x}(t)=e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0 \tag{22}$$

є розв'язком задачі Коші (17)-(3):

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\vec{x}(t)=A\vec{x}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$$

на проміжку $\Delta=(-\infty;+\infty)$.

Доведення. З посиланням на еквівалентність задачі Коші та інтегрального рівняння (9), достатньо довести, що вектор-функція (22) є неперервною та задовольняє рівняння:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}A\vec{x}(s)ds. \tag{23}$$

Ряд $e^{sA}\vec{x}_0=\vec{x}_0+sA\vec{x}_0+\frac{s^2}{2!}A^2\vec{x}_0+\ldots$ збігається рівномірно на кожному відрізку $[a;b]\in\mathbb{R}$. Це твердження є наслідком відповідної теореми Вейєрштрасса: слід взяти $c=\max\{|a|,|b|\}$; оцінити $\left\|\frac{(sA)^n}{n!}\vec{x}_0\right\|\le\frac{c^n\|A\|^n}{n!}\|\vec{x}_0\|$ і скористатись збіжністю числового ряду: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n\|A\|^n}{n!}\|\vec{x}_0\|$.

Внаслідок рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}s^n A^n\vec{x}_0$ робимо висновок: а) його сума $\vec{x}(s)=e^{sA}\vec{x}_0$ є неперервною на кожному відрізку $[a;b]$, а тому й на всій числовій осі; б) рівномірно збігається ряд $A\vec{x}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}s^n A^{n+1}\vec{x}_0$, а тому за відомою теоремою аналізу:

$$\int_{t_0}^{t}A\vec{x}(s)ds=\int_{t_0}^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}s^n A^{n+1}\vec{x}_0 ds=A\vec{x}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t}s^n ds\right)A^{n+1}\vec{x}_0=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}A^{n+1}\vec{x}_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\vec{x}_0 .$$

Підстановка останнього виразу в (23) дає тотожність. ■

Наслідки.

1. Загальний розв’язок рівняння (1) має вид: $\vec{x}(t)=e^{tA}\vec{C}$.

2. Задача Коші для матричного рівняння (18) з початковою умовою: $X(t_0)=X_0$ має єдиний розв’язок: $X(t)=e^{(t-t_0)A}X_0$.

3. Для квадратної матриці A для кожного $t\in\mathbb{R}$ має місце рівність: $\det e^{tA}=e^{t\,\mathrm{tr}\,A}$.

Доведення потребує лише наслідок 3.

У формулі Ліувілля – Якобі беремо $t_0 = 0; Y(0) = I$. Тоді маємо $\det e^{tA} = \det Y(t) = \det Y(0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds} = e^{t \operatorname{tr} A}$. ■

Твердження 5 (властивості матричної експоненти).

1) $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$

2) $(AB = BA) \Rightarrow \left(Be^A = e^A B; e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}; \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} \right)$.

3) Якщо матриця A має блочну структуру: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$, то

$e^A = \left(\begin{array}{c|c} e^{A_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{A_2} \end{array} \right)$.

4) $\exp\left(V^{-1} A V\right) = V^{-1} \cdot \exp A \cdot V$.

Доведення. 1) Для кожного $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$: $\frac{d}{dt}\left(e^{tA} \vec{x}_0\right) = A\left(e^{tA} \vec{x}_0\right)$.

2) а) $\frac{d}{dt} B e^{tA} = B \frac{d}{dt} e^{tA} = ABe^{tA}$. Тому Be^{tA} є розв'язок задачі Коші $\frac{d}{dt} X(t) = AX(t); X(0) = B$. Але ж він єдиний. Тому $Be^{tA} = e^{tA} B$.

б) $\frac{d}{dt} e^{tA} e^{tB} = Ae^{tA} e^{tB} + e^{tA} Be^{tB} = (A + B) e^{tA} e^{tB}$. Тому $e^{tA} e^{tB}$ є розв'язок задачі Коші: $\frac{d}{dt} X = (A + B) X; X(0) = I$, і повинен дорівнювати $e^{t(A+B)}$;

в) $e^A e^{-A} = e^0 = I$.

3) Блочну структуру матриці успадковують $A^2, A^3, \ldots$, а тому й сума відповідного ряду.

4) $\frac{d}{dt}\left(V^{-1}e^{tA}V\right)=V^{-1}Ae^{tA}V=\left(V^{-1}AV\right)\left(V^{-1}e^{tA}V\right)$. Тому $V^{-1}e^{tA}V$ – розв'язок задачі Коші: $\frac{d}{dt}X\left(t\right)=V^{-1}AVX\left(t\right);X\left(0\right)=I$ і повинен співпасти з $\exp\left(tV^{-1}AV\right)$.

§7. Обчислення розв'язків системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розв'язки рівняння (17) мають вид

$$\vec{x}\left(t\right)=e^{tA}\vec{C} \tag{24}$$

і їх пошук щільно пов'язаний з пошуком експоненти матриці tA. У подальшому будемо вважати, що матриця A – комплексна (це не є додатковою умовою, бо дійсні числа вкладаються у множину комплексних). В жордановому базисі матриця перетворюється на матрицю блочної структури:

$$A_J=\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix};$$

$A_J=V^{-1}AV$, де V – матриця переходу до жорданова базису: її стовпці є векторами жорданового базису у вихідному (канонічному) базисі. Далі:

$$\exp A_J=\begin{pmatrix} \boxed{\exp J_1} & & 0 \\ & \boxed{\exp J_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}; \qquad \exp A=V\left(\exp A_J\right)V^{-1}.$$

Залишилось обчислити $\exp J_k$ для кожного блоку матриці A_J.

Але жорданова клітина $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$, де матриця N має таку особливість:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$ ... ; $N^m = 0$, де m – розмір клітини. Далі: $e^{tJ} = \exp\left(\lambda t I + tN\right) = e^{\lambda t I} e^{\lambda t N} = e^{\lambda t} e^{tN}$;

$$e^{tN} = 1 + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + ... + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \ddots & \ddots \\ & 1 & t & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому $$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & e^{t\lambda} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

У випадку дійсної матриці A характеристичні числа матриці λ_k можуть бути уявними; матриця V також не є дійсною. Але в результаті матриця e^{tA} обов'язково виявиться дійсною (обміркуйте!).

Практична реалізація цього методу полягає в наступному. Стовпець координат вектора $\vec{x}$ в жордановому базисі позначимо через $\vec{x}_J$. Відомий зв'язок: $\vec{x} = V\vec{x}_J$ перетворює вихідне рівняння $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ в таке: $V\frac{d}{dt}\vec{x}_J = AV\vec{x}_J$, звідки $\frac{d}{dt}\vec{x}_J = A_J\vec{x}_J$. Тому $\vec{x}(t) = V\vec{x}_J(t) = Ve^{tA_J}\vec{C}$ (тут $\vec{C}$ – довільний вектор). Фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (17) тепер одержимо, якщо за вектор $\vec{C}$ будемо брати вектори канонічного базису. А це саме стовпці матриці Ve^{tA_J}.

Найпростіший випадок виникає в тому разі, якщо жорданова матриця A_J виявиться діагональною.

Твердження 6. Якщо $\lambda_1,...,\lambda_m$ – власні числа матриці A, що відповідають лінійно незалежній системі власних векторів $\vec{f}_1,...,\vec{f}_m$, то $\left\{e^{t\lambda_1}\vec{f}_1,...,e^{t\lambda_m}\vec{f}_m\right\}$ – лінійно незалежна система розв'язків системи (17).

Доведення. $\frac{d}{dt}e^{\lambda_k t}\vec{f}_k = \lambda_k e^{\lambda_k t}\vec{f}_k = A\left(e^{\lambda_k t}\vec{f}_k\right)$. Лінійна незалежність цієї системи вектор-функцій є наслідком лінійної незалежності її значень при $t = 0$.■

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 4x \\ \dot{y} = z - 3x - y \\ \dot{z} = -x - z \end{cases} \tag{25}$$

Матриця системи: $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ має єдине характеристичне число $\lambda=-2$. Відповідний жорданів базис складається з одного жорданова ланцюжка: власного вектора $\vec{f}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ та приєднаних векторів $\vec{f}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ та $\vec{f}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Жорданова форма: $A_J=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. Звідси: $e^{tA_J}=e^{-2t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

$V=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Звідси фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (25) має вид: $\vec{x}_1(t)=e^{-2t}\vec{f}_1$; $\vec{x}_2(t)=e^{-2t}\left(t\vec{f}_1+\vec{f}_2\right)$; $\vec{x}_3(t)=e^{-2t}\left(\frac{t^2}{2}\vec{f}_1+t\vec{f}_2+\vec{f}_3\right)$. Загальний розв'язок: $\vec{x}=C_1\vec{x}_1(t)+C_2\vec{x}_2(t)+C_3\vec{x}_3(t)$, або

$$\begin{cases} x(t)=e^{-2t}\left(C_1+C_2t+C_2\dfrac{t^2}{2}\right)\\ y(t)=e^{-2t}\left(2C_1+C_2(2t+1)+C_3\left(t^2+t\right)\right)\\ z(t)=e^{-2t}\left(C_1+C_2(t+1)+C_3\left(\dfrac{t^2}{2}+t+1\right)\right). \end{cases} \qquad (26)$$

Зверніть увагу на те, що при розв'язанні системи (25) не довелось знаходити значення $\exp(tA)$. Але після того, як систему (25) було розв'язано, можна знайти (як “подарунок”) точне значення $\exp(tA)$. Справа в тому, що стовпці $\vec{b}_k(t)$ матриці $B(t)=e^{tA}$ – це розв'язки системи (25) з початковою умовою $\vec{e}_k(0)=\vec{e}_k$, де $\vec{e}_k$ – k-й стовпець канонічного базису в $\mathbb{R}^n$.

Для пошуку першого стовпця $\vec{b}_1(t)$ матриці e^{tA} використовуємо (26): $1=C_1$; $0=2C_1+C_2$; $0=C_1+C_2+C_3$. Звідси:

$$C_1=1; \qquad C_2=-2; \qquad C_3=1; \qquad \vec{b}_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t+\dfrac{t^2}{2} \\ 2-2(2t+1)+t^2+t \\ 1-2(t+1)+\dfrac{t^2}{2}+t+1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо й інші стовпці матриці e^{tA}.

Вправа. Доведіть до кінця пошук експоненти e^{tA}.

Природна складність при пошуку розв'язків системи (17) виникає в тому разі, якщо характеристичні числа матриці A виявляються уявними. Але у випадку дійсної матриці A, характеристичний многочлен матриці A має дійсні коефіцієнти, і тому його корені входять парами: $\lambda_1=\alpha+\beta i$; $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=\alpha-\beta i$, причому з однаковою кратністю.

У випадку простих комплексних коренів $\lambda_1;\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ (кратності 1) наступні міркування принципово скорочують розв'язання задачі.

Уявімо собі, що йде пошук комплексних розв'язків системи (17). Тоді у відповідності з твердженням 6, до фундаментальної системи розв'язків входять функції $\vec{x}_1(t)=e^{t\lambda_1}\vec{f}_1$ та $\vec{x}_2(t)=e^{t\lambda_2}\vec{f}_2$. Тут $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$; $\vec{f}_1,\vec{f}_2$ – власні вектори матриці A з відповідними власними числами $\lambda_1;\lambda_2$ (в комплексному просторі $\mathbb{C}^n$). Нескладно перевірити, що $\vec{f}_1=\overline{\vec{f}_2}$ (покоординатне комплексне спряження). Тому $\vec{x}_2(t)=\overline{\vec{x}_1}(t)$. Тоді розв'язками системи (17) будуть також $\vec{u}(t)=\operatorname{Re}\vec{x}_1(t)=\dfrac{1}{2}(\vec{x}_1(t)+\vec{x}_2(t))$ та $\vec{v}(t)=\operatorname{Im}\vec{x}_1(t)=\dfrac{1}{2i}(\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t))$ і при цьому система вектор-функцій $\{\vec{u}(t),\vec{v}(t)\}$ еквівалентна системі $\{\vec{x}_1(t),\vec{x}_2(t)\}$. Тому система $\{\vec{u}(t),\vec{v}(t)\}$ – лінійно незалежна і в дійсному випадку.

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=-2x+3y\end{cases} \tag{27}$$

Матриця системи $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ має характеристичні числа $\lambda_{1,2}=2\pm i$. В комплексному просторі власному числу $\lambda_1=2+i$ відповідає вектор $\vec{f}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}$ і відповідний розв'язок має вид $\vec{x}_1(t)=e^{\lambda_1 t}\vec{f}_1=e^{(2+i)t}\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ (1+i)(\cos t+i\sin t)\end{pmatrix}$. Загальний розв'язок:

$$\vec{x}(t)=C_1\operatorname{Re}\vec{x}_1(t)+C_2\operatorname{Im}\vec{x}_1(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}$$

. Додатково можна знайти й експоненту матриці tA: $e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ (перевірте!).

§8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_n x(t) = 0. \qquad (28)$$

$a_1, a_2, ..., a_n$ – числа (дійсні або комплексні).

Многочлен $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ – <u>характеристичний многочлен оператора</u> L <u>або рівняння</u> (28). Для функції $x(t) = e^{\mu t}$ нескладно перевірити:

$$L\left(e^{\mu t}\right) = p(\mu)e^{\mu t}. \qquad (29)$$

Тому для коренів λ_k многочлена $p(\lambda)$ функції $e^{\lambda_k t}$ будуть розв'язками.

Теорема 6. Нехай $\lambda_1, ..., \lambda_m$ – повний набір (комплексних) коренів многочлена $p(\lambda)$ кратностей відповідно $k_1, k_2, ..., k_m$. Тоді фундаментальна система розв'язків рівняння (28) складається з функцій:

$$e^{\lambda_1 t}; te^{\lambda_1 t}, ..., t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}; e^{\lambda_2 t}, ..., t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}; ...; t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}. \qquad (30)$$

Лема 2.

$$L\left(y(t)\cdot e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t}\left(y^{(n)} + \frac{p^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}y^{(n-1)} + ... + p(\lambda)y\right) =$$

$$e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(\lambda)}{k!}y^{(k)}. \qquad (31)$$

Доведення леми 2. Розглянемо оператор $L_\lambda : y \mapsto e^{-\lambda t} L\left(y \cdot e^{\lambda t}\right)$. Цей оператор також лінійний і зі сталими коефіцієнтами. Шукаємо його характеристичний многочлен. Посилаючись на (29), маємо: $L_\lambda e^{\mu t} = e^{-\lambda t} L\left(e^{(\lambda+\mu)t}\right) = e^{-\lambda t} p(\lambda+\mu) e^{(\lambda+\mu)t} = p(\lambda+\mu)e^{\mu t}$. Звідси: характеристичний многочлен оператора L_λ дорівнює $q(\mu) = p(\mu+\lambda)$. Якщо $L_\lambda y = y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_n y$, то $p(\mu+\lambda) = \mu^n + b_1\mu^{n-1} + \ldots + b_n$ і коефіцієнти b_k можна одержати за формулою Тейлора: $p(\mu+\lambda) = p(\lambda) + p'(\lambda)\mu + \dfrac{p''(\lambda)}{2!}\mu^2 + \ldots + \dfrac{p^{(n)}(\lambda)}{n!}\mu^n$.■

Доведення теореми. Покладемо у формулі (31): $y(t) = t^k$; $k < k_1$. За умовами теореми $p^{(j)}(\lambda_1) = 0$, $0 \le j \le k_1 - 1$. Крім того $(t_k)^{(j)} = 0$ при $j > k$. Тому всі доданки у формулі (31) дорівнюють нулю і $L\left(t^k e^{\lambda_1 t}\right) = 0$ для $0 \le k \le k_1 - 1$. Аналогічно перевіряється, що усі інші функції системи (30) є розв'язками.

Їх кількість дорівнює порядку рівняння (28). Тож залишилось перевірити лише їх лінійну незалежність.

Лінійна комбінація функцій набору (30) (з комплексними коефіцієнтами) є визначеною на вихідному проміжку Δ функцією виду:

$$f(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_m(t)e^{\lambda_m t}, \tag{32}$$

де $p_k(t)$ – многочлени. Покладемо $f(t) = 0$ на Δ і доведемо, що усі многочлени – нульові.

З цією метою розглянемо цілу функцію (аналітичну в $\mathbb{C}$): $f(z) = p_1(z)e^{\lambda_1 z} + \ldots + p_m(z)e^{\lambda_m z}$. За теоремою єдиності $f(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Тому $f(t) \equiv 0$ на $[0, +\infty)$.

З іншого боку для функції $f(t)$, що тепер визначена на півосі $[0, +\infty)$ формулою (32), можна розглянути перетворення Лапласа $\hat{f}(p) = \dfrac{C_0}{p - \lambda_1} + \dfrac{C_1 \cdot 2!}{(p - \lambda_1)^2} + \ldots + \dfrac{C_{k_1 - 1} \cdot (k_1 - 1)!}{(p - \lambda_1)^{k_1}} + \ldots$, яке також дорівнює нулю в $\mathbb{C}$. Тому $\hat{f}$ не повинна мати в $\mathbb{C}$ особливих точок, тож усі коефіцієнти многочленів $p_k(t)$ нульові.■

В тому разі, якщо усі коефіцієнти a_k рівняння (28) є дійсними, у відповідності до загальної теорії ми маємо підстави стверджувати, що рівняння (28) має фундаментальну систему розв'язків, що складається з дійснозначних функцій. Таку систему розв'язків можна одержати, якщо для кожної пари комплексно спряжених коренів $\lambda = \alpha + \beta i; \overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ многочлена $p(\lambda)$ кожну підсистему, що складається з двох розв'язків $t^k e^{\lambda t}$ та $t^k e^{\overline{\lambda} t}$ замінити на підсистему $\{t^k e^{\alpha t} \cos \beta t; t^k e^{\alpha t} \sin \beta t\}$. Оскільки в разі комплекснозначних функцій нова підсистема еквівалентна вихідній, то після вказаної перебудови, повний набір функцій залишається фундаментальною системою розв'язків рівняння (28) у випадку комплексного поля, а тому й поля $\mathbb{R}$ (обміркуйте!).

§9. Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь

Предмет дослідження – система (у матричному вигляді):

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \tag{33}$$

Всі елементи матриці $A(t)$ і компоненти стовпця $\vec{f}(t)$ припускаються неперервними на фіксованому числовому проміжку.

Якщо до часткового розв'язку $\vec{x}_ч(t)$ системи (33) додати який-небудь розв'язок $\vec{y}(t)$ відповідної однорідної системи (6), то їх сума $\vec{x}_ч(t) + \vec{y}(t)$ знову буде розв'язком системи (33) (перевірте!). З іншого боку, так можна одержати усі розв'язки (33), бо різниця розв'язків (33) задовольняє систему (6). Одержаний "рецепт" розв'язання системи (33) зазвичай формулюється так:

Твердження 7. Загальний розв'язок неоднорідної системи є сума часткового розв'язку цієї системи ти загального розв'язку відповідної однорідної системи. ■

Нехай $X(t)$ – фундаментальна матриця однорідної системи (6). Нагадаємо, її стовпці утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (6). Тож $X(t)$ – невироджена при $\forall t \in \Delta$; $\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t)$ і загальний розв'язок системи (6) має вид: $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}$.

Метод варіації полягає в тому, що розв'язок системи (33) шукаємо у вигляді: $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}(t)$. Після підстановки у рівняння (33) одержимо:

$$\dot{X}(t)\vec{C}(t) + X(t)\dot{\vec{C}}(t) = A(t)X(t)\vec{C}(t) + \vec{f}(t);$$

звідки:

$$X(t)\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t), \tag{34}$$

Тож $\vec{C}(t)=\vec{C}+\int_{t_0}^{t}\left(X(\tau)\right)^{-1}\vec{f}(\tau)d\tau$ і загальний розв’язок вихідного рівняння (33) має вид:
$$\vec{x}(t)=X(t)\vec{C}+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau=X(t)\vec{C}+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$
.

Матричнозначна функція двох змінних $U(t,\tau)=X(t)X^{-1}(\tau)$ називається <u>еволюційним оператором</u> (<u>еволюційною матрицею</u>) системи (33), а розв’язок набуває остаточного вигляду:
$$\vec{x}(t)=X(t)\vec{C}+\int_{t_0}^{t}U(t,\tau)\vec{f}(\tau)d\tau, \tag{35}$$
(перший доданок є загальним розв’язком відповідної однорідної системи (6)).

Властивості еволюційного оператора:

1) $U(t,\tau)$ не залежить від вибору фундаментальної матриці $X(t)$.

Доведення. $\frac{d}{dt}U(t,\tau)=\frac{d}{dt}X(t)X^{-1}(\tau)=A(t)X(t)X^{-1}(\tau)=$ $=A(t)U(t,\tau)$. Тому при фіксованому τ: $U(t,\tau)$ є розв’язком системи $\frac{d}{dt}Y(t)=A(t)Y(t)$ з початковою умовою: $Y(\tau)=I$. А такий розв’язок єдиний. ■

2) $U(t,t)=I$.

3) $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)$.

4) $U(t,\tau)=\left[U(\tau,t)\right]^{-1}$.

Властивості 2-4 очевидні (перевірте!).

Матриця $U(t)=U(t,0)$ називається <u>матрицею Коші</u> системи (33). Очевидно: $U(t,\tau)=U(t)U(\tau)^{-1}$; $\frac{d}{dt}U(t)=A(t)U(t);U(0)=I$. Матрицю $U(t)$ можна взяти за фундаментальну матрицю і тоді

$$\vec{x}(t)=U(t)\vec{C}+\int_0^t U(t,\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$

буде розв'язком вихідної системи з початковою умовою: $\vec{x}(0)=\vec{C}$. В тому разі, якщо коефіцієнти сталі, $U(t)=e^{tA};U(t,\tau)=e^{(t-\tau)A}$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases}\dot{x}=-y+1\\ \dot{y}=x+\operatorname{tg}t\end{cases}$

Спочатку розв'яжемо відповідну однорідну систему:

$$\vec{x}(t)=X(t)\vec{C}+\int_{t_0}^t U(t,\tau)\vec{f}(\tau)d\tau, \qquad (36)$$

Найпростіше: привести систему до одного диференціального рівняння 2го порядку:

$$\ddot{x}+x=0 \qquad (37)$$

Звідки $\begin{cases}x_1=\cos t\\ x_2=\sin t\end{cases}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (37), а тому $X(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ – фундаментальна матриця системи (36).

Тож шукаємо $\vec{C}(t)$ з системи (див. (34)):

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{tg}\, t \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{tg}\, t \end{pmatrix}.$$Далі:

$$\dot{C}_1(t)=\cos t+\frac{\sin^2 t}{\cos t}=\frac{1}{\cos t},\ C_1(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+\tilde{C}_1;$$

$$\dot{C}_2(t)=0; C_2(t)=\tilde{C}_2;\ \vec{x}(t)=X(t)\vec{C}(t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x(t)=\tilde{C}_1\cos t-\tilde{C}_2\sin t+\frac{1}{2}\cos t\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) \\ y(t)=\tilde{C}_1\sin t+\tilde{C}_2\cos t+\frac{1}{2}\sin t\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right). \end{cases}$$

§10. Метод варіації сталих для неоднорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку

$$(Lx)(t)=x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)x(t)=f(t) \tag{38}$$

Так само, як і для неоднорідних систем, має місце аналог твердження 7: загальний розв’язок рівняння (38) складається з часткового розв’язку цього рівняння (38) та загального розв’язку відповідного однорідного рівняння.

Нагадаємо, що рівнянню (38) можна поставити у відповідь систему рівнянь 1$^{\text{го}}$ порядку (33), у якій

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix};\ \vec{f}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{39}$$

і має місце природна взаємно однозначна відповідність між розв’язками системи (33) з урахуванням (39) та рівняння (38).

Якщо $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, спорідненого з (38), то фундаментальна матриця системи однорідних рівнянь, спорідненої з (33) має вид:

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \cdots & \dot{x}_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{40}$$

Для розв'язання системи (33) методом варіації розв'язок її шукали у вигляді: $\vec{x}(t)=X(t)\vec{C}(t)$, а $\vec{C}(t)$ задовольняв рівняння (34). Рівняння (34) з урахуванням (40) приймає вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(j)}(t)\dot{C}_k(t)=0,\ j=0;1;...;n-2 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(n-1)}(t)\dot{C}_k(t)=f(t) \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння (38) тепер матиме вид: $x(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k(t)x_k(t)$.

§11. Метод невизначених коефіцієнтів для неоднорідних лінійних рівнянь

Цей метод полягає в пошуку часткового розв'язку спеціального виду для неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

$$(Lx)(t)=x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=f(t)=e^{\alpha t}\left(b_0t^m+...+b_m\right). \tag{41}$$

Права частина рівняння (41) – "<u>квазіполіном</u>". Нехай $p(\lambda)$ – характеристичний многочлен диференціального оператора L. Рівняння (41) будемо записувати і так: $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = f$.

1. **Нерезонансний випадок**. Нехай $p(\alpha) \neq 0$.

Твердження 8. У разі, якщо $p(\alpha) \neq 0$ рівняння (41) має і притому єдиний розв'язок виду: $x(t) = e^{\alpha t}\left(c_0 t^m + \ldots + c_m\right)$.

Доведення. Заміна $x(t) = e^{\alpha t} y(t)$. Тоді за лемою 2:

$$L\left(e^{\alpha t} y(t)\right) = e^{\alpha t}\left(y^{(n)}(t) + \frac{p^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t) + \ldots + \frac{p(\alpha)}{1!} y(t)\right) =$$

$$= e^{\alpha t}\left(b_0 t^m + \ldots + b_m\right). \qquad (42)$$

Оператор $L_\alpha : y(t) \mapsto e^{-\alpha t} L\left(e^{\alpha t} y(t)\right)$ переводить многочлен у многочлен; характеристичний многочлен $q(\lambda)$ оператора L_α має вид: $q(\lambda) = p(\lambda + \alpha)$.

Нехай E – лінійний простір многочленів степеня не вищого за m. Позначимо через A обмеження оператора L_α на простір E.

Оператор $L_\alpha = q\left(\frac{d}{dt}\right)$ має таку особливість: у виразі $\left(L_\alpha y\right)(t) = y^{(n)}(t) + \tilde{a}_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + \tilde{a}_n y(t)$ маємо: $\tilde{a}_n = q(0) = p(\alpha) \neq 0$. Виберемо в просторі E базис: $\vec{e}_k = \frac{t^k}{k!}\,(k = 0, \ldots, m)$. Матриця оператора $\frac{d}{dt}$ в цьому базисі має вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому матриця оператора A така:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{a}_{n-2} & \cdots \\ 0 & \tilde{a}_n & \tilde{a}_{n-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$$

Оскільки A – невироджена матриця, то рівняння $L_\alpha y = z$, яке еквівалентне (42), в просторі E має, і притому єдиний розв'язок.■

2. **Резонансний випадок**.

Теорема 7. Нехай
$p(\alpha) = p'(\alpha) = ... = p^{(k-1)}(\alpha) = 0; p^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Тоді рівняння (41) має і притому єдиний розв'язок виду:
$x(t) = e^{\alpha t} t^k \left(c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + ... + c_m\right)$.

Доведення. За формулою (42) маємо:

$$\left(L_\alpha y\right)(t) = e^{-\alpha t} L\left(y \cdot e^{\alpha t}\right) =$$
$$= y^{(n)}(t) + \frac{p^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t) + ... + \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} y^{(k)}(t).$$

Приходимо до задачі пошуку многочлена $y(t)$, для якого:

$$y^{(n)}(t) + \tilde{a}_1 y^{(n-1)}(t) + ... + \tilde{a}_{n-k} y^{(k)}(t) = b_0 t^m + ... + b_m \tag{43}$$

і при цьому $\tilde{a}_{n-k} \neq 0$.

Якщо зробити заміну: $y^{(k)}(t) = z(t)$, то за аналогією з доведенням твердження 8, маємо висновок про існування єдиного многочлена $z(t)$, степеня не вищого за m, для якого

$$\left(\tilde{L}_{\alpha} z\right)(t) = z^{(n-k)}(t) + \tilde{a}_1 z^{(n-k-1)}(t) + \ldots + \tilde{a}_{n-k} z(t) = b_0 t^m + \ldots + b_m .$$

Тепер $y(t)$ можна знайти k-кратним інтегруванням $z(t)$. При цьому одержимо (єдиний!) многочлен виду $t^k\left(c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \ldots + c_m\right)$ в сумі з многочленом виду $d_1 t^{k-1} + \ldots + d_{k-1} t + d_k$. Другий доданок задовольняє споріднене з (43) однорідне рівняння і тому рівняння (43) має і притому єдиний розв'язок виду $y(t) = t^k\left(c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \ldots + c_m\right)$, що й доводить теорему. ■

У випадку дійсних коефіцієнтів важливим є узагальнення теореми 7, яке стосується випадку, коли неоднорідність $f(t)$ має вид:

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right) \tag{44}$$

(тут $P_1(t), P_2(t)$ – многочлени, максимальний степінь яких дорівнює m). В цьому разі запровадимо многочлен $P(t) = P_1(t) - iP_2(t)$ (степінь $P(t) = m$). Тоді:

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+\beta i)t} P(t)\right) \text{ (перевірте!)}$$

В разі, якщо $\lambda = \alpha + \beta i$ є коренем характеристичного многочлена оператора L, кратності k (а тому й $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$), рівняння $(Lx)(t) = e^{(\alpha+\beta i)t} P(t)$ має розв'язок виду $e^{(\alpha+\beta i)t} t^k \cdot Q(t)$, де степінь $Q(t)$ не перевищує m.

Тоді комплексно спряжена функція $\overline{x}(t)$ задовольняє рівняння $(L\overline{x})(t)=\overline{e^{(\alpha+\beta i)t}P(t)}$, а тому $L(\operatorname{Re}x(t))=f(t)$.

Цим встановлено існування розв'язку рівняння (44) виду:

$$y(t)=\operatorname{Re}\left(e^{(\alpha+\beta i)t}t^kQ(t)\right)=e^{\alpha t}t^k\left(Q_1(t)\cos\beta t+Q_2(t)\sin\beta t\right), \qquad (45)$$

де $Q_1(t)=\operatorname{Re}Q(t);Q_2(t)=-\operatorname{Im}Q(t)$.

При цьому в формулі (45): степені $Q_1(t)$ та $Q_2(t)$ не перевищують m.

Вправа. Доведіть, що серед розв'язків рівняння (44) існує лише єдиний розв'язок виду (45) з умовою: "степені $Q_1(t)$ та $Q_2(t)$ не перевищують m".

§12. Метод невизначених коефіцієнтів для неоднорідних систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему

$$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+e^{\alpha t}\vec{P}(t), \qquad (46)$$

де $\vec{P}(t)=t^m\vec{b}_0+t^{m-1}\vec{b}_1+...+t\vec{b}_{m-1}+\vec{b}_m$.

Тут A – стала матриця; неоднорідність $\vec{f}=e^{\alpha t}\vec{P}(t)$ – квазіполіном.

1. **Нерезонансний випадок**.

Твердження 9. Нехай α не є коренем характеристичного многочлена матриці A. Тоді система (46) має і притому єдиний розв'язок виду: $\vec{x}(t)=e^{\alpha t}\left(t^m\vec{c}_0+t^{m-1}\vec{c}_1+...+t\vec{c}_{m-1}+\vec{c}_m\right)$.

Доведення. Покладемо $\vec{x}(t)=e^{\alpha t}\vec{Q}(t)$, де $\vec{Q}(t)=t^m\vec{c}_0+...+\vec{c}_m$. Тоді $\dot{\vec{x}}(t)=e^{\alpha t}\left(\alpha\vec{Q}(t)+\vec{Q}'(t)\right)$ і з (46) маємо:

$$\alpha\vec{Q}(t)+\vec{Q}'(t)=A\vec{Q}(t)+\vec{P}(t),$$

звідки:

$$\vec{Q}'(t) = (A - \alpha I)\vec{Q}(t) + \vec{P}(t).$$

Порівняємо коефіцієнти при різних степенях t:

$$\begin{cases} \vec{0} = (A - \alpha I)\vec{c}_0 + \vec{b}_0 \\ m\vec{c}_0 = (A - \alpha I)\vec{c}_1 + \vec{b}_1 \\ \dots \\ \vec{c}_{m-1} = (A - \alpha I)\vec{c}_m + \vec{b}_m \end{cases} \qquad (47)$$

Оскільки $\det(A - \alpha I) \neq 0$, то система (47) покроково однозначно розв'язується.

2. **Резонансний випадок**. Нехай α – корінь характеристичного многочлена матриці A. Перейдемо до жорданова базиса. При цьому коефіцієнти многочлена $\vec{P}(t)$ змінюються (зауважимо, що ненульові коефіцієнти переходять в ненульові). А оскільки жорданова форма матриці розкладається на клітини, то зосередимо увагу на дослідженні одноклітинної матриці. Тож нехай система має вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}}_{B} \vec{x}(t) + e^{\alpha t}\vec{P}(t) \qquad (48)$$

В разі, якщо $\lambda \neq \alpha$, то як і раніше приходимо до розв'язку $e^{\alpha t}\vec{Q}(t) = e^{\alpha t}\left(\vec{c}_0 t^m + \ldots + \vec{c}_m\right)$.

Якщо ж $\lambda = \alpha$, то також покладемо: $\vec{x}(t) = e^{\alpha t}\vec{Q}(t)$. Тоді: $\alpha\vec{Q}(t) + \vec{Q}'(t) = B\vec{Q}(t) + \vec{P}(t)$;

$$\vec{Q}'(t) = (B - \alpha I)\vec{Q}(t) + \vec{P}(t); \tag{49}$$

$$B - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай порядок клітини B дорівнює k. Тоді $(B - \alpha I)^k = 0$. З (49) маємо:

$$\vec{Q}''(t) = (B - \alpha I)\vec{Q}'(t) + \vec{P}'(t) = (B - \alpha I)^2 \vec{Q}(t) + (B - \alpha I)\vec{P}(t) + \vec{P}'(t)$$

і т.д. Наприкінці:

$$\vec{Q}^{(k)}(t) = \underbrace{(B - \alpha I)^k \vec{Q}(t)}_{=\vec{0}} + (B - \alpha I)^{k-1} \vec{P}(t) + \\ + (B - \alpha I)^{k-2} \vec{P}'(t) + \ldots + \vec{P}^{(n-1)}(t). \tag{50}$$

З рівняння (50) $\vec{Q}(t)$ знаходимо k-кратним інтегруванням. $\vec{Q}(t) = t^{m+k}\vec{c}_0 + t^{m+k-1}\vec{c}_1 + \ldots + \vec{c}_{m+k}$.

Оскільки вихідна система (46) в жордановому базисі розкладається поблочно на системи виду (48), то приходимо до загального алгоритму пошуку часткового розв'язку системи (46): розв'язок слід шукати у вигляді:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t}\left(\vec{c}_0 t^{m+k} + \ldots + \vec{c}_{m+k}\right); \tag{51}$$

де k – порядок найбільшої жорданової клітини, що відповідає власному числу α. При цьому ми не можемо гарантувати єдиність розв'язку виду (51).

Узагальнення (без доведення). Для систем виду

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + e^{\alpha t}\left(\vec{P}_1(t)\cos\beta t + \vec{P}_2(t)\sin\beta t\right)$$

розв'язок слід шукати у вигляді:

$$\vec{x}_ч(t) = e^{\alpha t}\left(\vec{Q}_1(t)\cos\beta t + \vec{Q}_2(t)\sin\beta t\right);$$

степені $\vec{Q}_1(t)$, $\vec{Q}_2(t)$ не перевищують $m+k$, де $m = \max\left(cm.\vec{P}_1; cm.\vec{P}_2\right)$, а k дорівнює максимальному розміру жорданової клітини матриці A, що відповідає числу $\alpha + \beta i$.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{52}$$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ має жорданову форму $A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а матриця переходу $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\vec{x}_{одн}(t) = Ve^{tA_J}\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{C} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Частковий розв'язок системи (52) шукаємо у вигляді:

$\vec{x}_ч(t) = e^t\left(\vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}\right)$, тобто $\begin{cases} x(t) = e^t\left(a_1 t^2 + b_1 t + c_1\right) \\ y(t) = e^t\left(a_2 t^2 + b_2 t + c_2\right) \end{cases}$.

Після підстановки в (52) одержимо систему з 6 лінійних рівнянь на коефіцієнти $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Її розв'язок:

$$\vec{x}_ч(t) = e^t\left(t^2\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ (перевірте!)}$$

Остаточно: $\vec{x}(t) = \vec{x}_{одн}(t) + \vec{x}_ч(t)$, тобто:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^t \left(t+1\right) + e^t \left(\dfrac{1}{2} t^2 + t\right) \\ y = -C_1 e^t - C_2 t e^t - \dfrac{1}{2} t^2 e^t. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
3. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
4. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 468 с.
6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Физматгиз, 1965. – 332 с.
7. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: изд-во МГУ, 1998. – 480 с.
9. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
10. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ “РХД”, 2000. – 176 с.
11. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: УРСС, 2002. – 176 с.